This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

514.(
B 8)

VORLESUNGEN

ÜBER

GESCHICHTE DER TRIGONOMETRIE

VON

Dr. A. VON BRAUNMÜHL

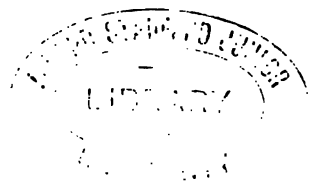
O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU MÜNCHEN.

ERSTER TEIL.

VON DEN ÄLTESTEN ZEITEN BIS ZUR ERFINDUNG DER LOGARITHMEN.

MIT 62 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1900.



a 60718

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

Die Geschichte der Trigonometrie, die ich hiermit der Öffentlichkeit übergebe, ist aus Vorlesungen hervorgegangen, welche ich während zweier Semester an der Münchener technischen Hochschule gehalten habe. Hierzu boten mir sowohl äufsere, als innere Gründe die Veranlassung: äufsere, insoferne ich an unserer Hochschule unter anderem Vorlesungen über Trigonometrie zu halten habe und daher strebsamen Zuhörern die Gelegenheit geben wollte, in den Entwickelungsgang dieser für sie so wichtigen Disziplin einzudringen, innere, insoferne es kaum ein für geschichtliche Darstellung geeigneteres Spezialgebiet der Mathematik gibt, als gerade die Trigonometrie, da sie als eine im Ganzen fertige, in sich abgeschlossene Wissenschaft vor uns steht. Man mag es vielleicht als eine Kühnheit, oder doch als überflüssig bezeichnen, dafs ich mich entschlossen habe, diese Vorlesungen dem wissenschaftlichen Publikum vorzulegen, nachdem uns Herr M. Cantor erst vor Kurzem mit einer allgemeinen Geschichte der Mathematik beschenkt hat, um welche uns Deutsche andere Nationen beneiden. Aber gerade, da uns durch dieses unübertroffene Werk in grofsen Zügen ein Bild von dem Entwickelungsgange der Mathematik entworfen wurde, halte ich es am Platze, dieses Bild im Einzelnen auszumalen und durch Vertiefung in Details zu vervollständigen, die bei einem grofsen Gemälde nicht berücksichtigt werden können und dürfen, ohne den Gesamteindruck zu verwirren. Auch hoffe ich, dafs der Leser unter diesen Details manche finden wird, die seine bisherige Anschauung über die Entstehung und Fortbildung unserer Spezialwissenschaft einigermafsen modifizieren, indem sie bisher teils ganz übersehen, teils nicht in gebührender Weise hervorgehoben wurden. Dazu rechne ich in erster Linie eine von mir schon früher mitgeteilte graphische Methode der Griechen, die von den Indern und Arabern zu einem der fruchtbarsten Hilfsmittel trigonometrischer Rechnung ausgestaltet wurde und bis ins siebzehnte Jahrhundert in Gebrauch blieb. Sie dürfte vor allem dazu beitragen, die oft geäufserte Ansicht gründlich zu

zerstören, als hätten die Araber in der Geschichte der Mathematik nur als konservierendes und vermittelndes Element gedient, ohne zu den überkommenen Lehren Neues hinzuzufügen.

Ferner dürfte sich Regiomontan's Bild, wenigstens was unsere Wissenschaft anlangt, in einer wesentlich anderen Beleuchtung zeigen, als man es bisher zu sehen gewohnt war, indem sich die Originalität seiner Schöpfungen, wie ich teilweise schon früher nachwies, durch die von ihm benützten Arbeiten seiner Vorgänger stark beeinträchtigt zeigt.

Das Gegenteil findet bei Vieta statt; seine bahnbrechende Stellung in der Geschichte der Algebra ist längst erkannt, nicht so aber in der Geschichte der Trigonometrie, obgleich diese ihm die höchste der mathematischen Wissenschaften war. Es mag dieser Umstand in der überaus schwierigen und zeitraubenden Lektüre seiner trigonometrischen Arbeiten liegen, eine Lektüre, die mir übrigens die darauf verwendete Mühe reichlich lohnte. Einiges Interesse wird vielleicht auch die Charakterisierung von Euler's Stellung in der Geschichte der Trigonometrie beanspruchen dürfen, welche der zweite Teil des Buches bringen soll.

Damit habe ich nur auf einige der wichtigsten Einzelheiten aufmerksam gemacht und verweise bezüglich der übrigen auf das Werk selbst.

Dasselbe zerfällt also in zwei Teile, von denen der vorliegende erste die geschichtliche Entwickelung unserer Wissenschaft von den ältesten Zeiten bis zur Erfindung der Logarithmen umfaſst, während der zweite dieselbe von da an bis zur Neuzeit behandeln soll. Bei der Darstellung habe ich mich im allgemeinen an die zeitliche Aufeinanderfolge gehalten, jedoch hiervon wiederholt eine Ausnahme gemacht, z. B. wenn es sich darum handelte, die Leistungen einer hervorragenden Persönlichkeit im Zusammenhange vorzuführen, oder die Entwickelung einer wichtigen Methode klarzustellen, deren Bedeutung sonst nicht in der richtigen Weise hätte gewürdigt werden können. Gerade die Charakterisierung der Methoden, welcher man sich zu den verschiedenen Zeiten bediente, fand ich aber für weit wichtiger, als den Erfinder jeder einzelnen unbedeutenden trigonometrischen Formel aufzuspüren, obwohl auch Leser, welche sich hierüber orientieren wollen, wie ich hoffe, genügende Anhaltspunkte finden werden.

Was die Quellen anlangt, aus denen ich schöpfte, so war ich stets bestrebt, auf die Originale selbst zurückzugehen, die mir in den reichen Schätzen der Münchner Hof- und Staatsbibliothek in seltenem Maſse zu Gebote standen. Die orientalische Litteratur

konnte ich jedoch, als ihrer Sprachen unkundig, nur in Übersetzungen benützen, während ich für die Geschichte der Trigonometrie im Mittelalter, soweit es möglich war, auch handschriftliches Material verwendete.

Die Anwendungen mufste ich selbstverständlich, um das Werk nicht zu sehr auszudehnen, von meinem Plane ausschliefsen, was mich jedoch nicht hinderte, gelegentlich eine bisherige Ansichten richtig stellende oder ergänzende Bemerkung einzuschalten; auch die Kreismessung konnte nur kursorisch behandelt werden, und in der Darstellung der Geschichte der trigonometrischen und zyklometrischen Reihen mufste ich mir einige Beschränkung auferlegen. Aufserdem konnte ich es natürlich nicht als meine Aufgabe betrachten, ein Repertorium aller, namentlich in der neueren Zeit erschienener Hand- und Schulbücher zu geben — das ist Sache einer Bibliographie — ich werde daher im zweiten Teile nur jene Werke inbetracht zu ziehen haben, die zur Förderung der Wissenschaft als solcher beitrugen.

Zum Schlusse obliegt mir noch die angenehme Pflicht, meinem Freunde und Kollegen Siegmund Günther, der mich mit seinem reichen Wissen vielfach unterstützte, sowie Herrn Professor Max Curtze, dem vorzüglichen Kenner mittelalterlicher Litteratur, welcher mich auf verschiedene sehr wichtige Handschriften hinwies und mir eigene Auszüge aus solchen gütigst zur Verfügung stellte, meinen herzlichen Dank öffentlich auszusprechen. Auch Herrn Assistent Haller, der sich mit mir in die mühevolle Arbeit der Korrektur teilte, sowie dem Herrn Verleger danke ich bestens für die rasche Förderung des Druckes und für die gediegene Ausstattung des Buches.

München im August 1899.

A. von Braunmühl.

Inhalt des ersten Teiles.

1. Kapitel.

Seite

Spuren der Trigonometrie bei den ältesten Kulturvölkern . . 1

2. Kapitel.

Die Trigonometrie der Griechen. § 1—3.

§ 1. Die graphische Methode und die Vorläufer des Ptolemäus 10
§ 2. Die Sehnenrechnung der Griechen 19
§ 3. Die Trigonometrie des Ptolemäus und seiner Nachfolger 23

3. Kapitel.

Die indische Trigonometrie. § 1—2.

§ 1. Berechnung der Sinustafeln 31
§ 2. Methode der indischen Trigonometrie 38

4. Kapitel.

Ausbau der Trigonometrie bei den Ostarabern und Persern. § 1—6.

§ 1. Übergang der griechischen und indischen Mathematik in die Hände der Araber 42
§ 2. Al-Battâni und sein Buch über die Sterne 47
§ 3. Die Reform der Trigonometrie durch Abû'l Wafâ und seine Zeitgenossen 54
§ 4. Ibn Jûnos und die Ḥâkimitischen Tafeln 61
§ 5. Naṣîr Eddîn-Ṭûsi und sein Werk über das vollständige Viereck. . 65
§ 6. Ulûg-Beg und die Lösung der Dreiteilungsgleichung. 72

5. Kapitel.

Die Westaraber in Spanien und Afrika. § 1—2.

§ 1. Al-Zarkâli und Dschâbir ibn Aflaḥ. 76
§ 2. Abû'l Ḥasan Ali von Marokko 83

6. Kapitel.

Das christliche Mittelalter. § 1—4.

§ 1. Die Lateiner vom 5. bis zum 12. Jahrhundert. Die Griechen in Byzanz 86
§ 2. Einführung der arabischen Trigonometrie im Abendlande 92
§ 3. Nachrichten über Trigonometrie aus dem 13. Jahrhundert 95
§ 4. Die Trigonometrie im 14. und 15. Jahrhundert bis zum Auftreten Regiomontan's 103

7. Kapitel.

Die Wiedergeburt der Wissenschaften in Europa. § 1—7.

Seite

§ 1. Johannes Regiomontanus 118
§ 2. Regiomontan's Epigonen 133
§ 3. Nicolaus Coppernicus 139
§ 4. Georg Joachim Rhaeticus 144
§ 5. Erasmus Reinhold's Tangententafel 148
§ 6. Die Trigonometrie in Italien 149
§ 7. Die Trigonometrie in Frankreich bis zum Auftreten Vieta's 154

8. Kapitel.

Vom Auftreten Vieta's bis zur Erfindung der Logarithmen. § 1—12.

§ 1. Franciscus Vieta als Begründer der Goniometrie 156
§ 2. Die Zyklometrie am Ende des 16. Jahrhunderts 171
§ 3. Vieta als Reformator der Trigonometrie 176
§ 4. Maurice Bressieu und Nathaniel Torporley 183
§ 5. Thomas Fink's Geometria rotundi und ihr Einfluſs 186
§ 6. Wiedererfindung und Ausbildung der Prosthaphäresis 193
§ 7. Raymarus Ursus. Jobst Bürgi's Methoden zur Herstellung genauer Sinustafeln 204
§ 8. Das Opus Palatinum des Rhaeticus vom Jahre 1596 212
§ 9. Bartholomaeus Pitiscus 220
§ 10. Fortschritte der Trigonometrie in den Niederlanden 226
§ 11. Giovanni Antonio Magini 231
§ 12. Ausbau der Trigonometrie im 17. Jahrhundert auf Grund der älteren Methoden 236
Namen- und Sachregister 249

1. Kapitel.

Spuren der Trigonometrie bei den ältesten Kulturvölkern.

Wie die Anfänge geometrischen Denkens bekanntlich in der Feldmessung der alten Ägypter ihren Ursprung hatten, so führen auch die ersten Spuren der Trigonometrie auf die Bedürfnisse des praktischen Lebens bei jenem Volke zurück. In der That weist die älteste historische Überlieferung, die wir kennen, das Vorkommen trigonometrischer Verhältnisse bei den uralten Baudenkmälern Ägyptens nach. Das British Museum besitzt nämlich unter seinen Schätzen aus grauem Altertum einen Papyrus, der nach seinem Entdecker der Papyrus Rhind heifst und, wie die neuesten Forschungen ergaben, zur Zeit der Hiksoskönige, also zwischen 2000 und 1700 vor Christus, niedergeschrieben ist. Ja man hat sogar in dem in den Anfangsworten des Papyrus angeführten Könige Ra-ā-us, unter welchem der Schreiber Ahmes jenes alte Dokument verfafste, mit grofser Sicherheit den Hiksoskönig Apepa oder Apophis der Griechen erkannt[1]). In diesem Papyrus, dem einzigen auf Mathematik bezüglichen, von welchem eine vollständige Übersetzung und Erläuterung vorliegt, und der nach Ansicht seines Herausgebers ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter darstellt[2]), finden sich unter den daselbst behandelten geometrischen und stereometrischen Aufgaben fünf[3]), die unser hervorragendes Interesse in Anspruch nehmen. In den vier ersten derselben handelt es sich um die Bestimmung des „Seqt" oder des Verhältnisses gewisser an Pyramiden vorkommender Längen, welche die Namen *uχa* tebt, piremus[4]) und qai en haru führen. Der Herausgeber des Papyrus hat diese Worte, deren Bedeutung keineswegs unmittelbar klar ist, zu interpretieren vermocht,

1) Vgl. hierüber M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I. 2. Aufl. Leipzig 1894. 22. Wir werden dieses Werk im Folgenden stets kurz mit „Cantor" zitieren. — 2) Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter, übersetzt und erläutert von Aug. Eisenlohr. Leipzig 1877. — 3) Eisenlohr, Handbuch pag. 134—149 No. 56—60. — 4) Hieraus scheint das griechische Wort πυραμίς entstanden zu sein.

indem er den Umstand benützte, dass die Seitenflächen der noch erhaltenen ägyptischen Pyramiden sämtlich unter einem Winkel von 52° oder einem wenig hiervon abweichenden Winkel gegen die Grundfläche geneigt sind. Unter dieser Annahme aber folgt mit Notwendigkeit, dafs der piremus die Kante der Pyramide AS (Fig. 1) und der $u\chi a$ tebt die Diagonale AC der bei allen Pyramiden quadratischen Grundfläche ist, so dafs also der Seqt das Verhältnis

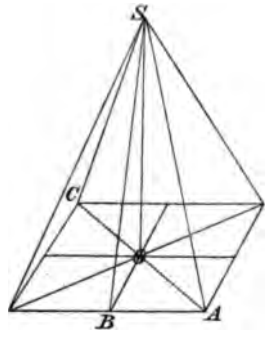


Fig. 1.

$$\frac{\frac{1}{2}u\chi a \text{ tebt}}{\text{piremus}} = \frac{OA}{AS} = \cos \sphericalangle SAO$$

darstellt. Damit war dann der fragliche Winkel geometrisch konstruierbar. Eine Abweichung hiervon bietet sich aber in der 5. Aufgabe (No. 60) dar, in welcher es sich um ein über quadratischer Grundfläche errichtetes, viel steiler als die gewöhnlichen Pyramiden zulaufendes Grabmal handelt. Das hier angegebene Verhältnis heifst qai en haru: $\frac{1}{2}$senti und scheint nur dann eine vernünftige Deutung zuzulassen, wenn man dem Zähler die Bedeutung der Pyramidenhöhe OS beilegt und $\frac{1}{2}$senti $= BO$, d. h. gleich der halben Seite der quadratischen Grundfläche setzt[1]). Nimmt man dies an, so gibt hier der Seqt, „das Verhältnis", die trigonometrische Tangente des Winkels OBS, der hiermit ebenfalls konstruierbar ist.

Aufser den besprochenen 5 Aufgaben, welche uns die ältesten bis jetzt entdeckten Spuren der Bestimmung eines Winkels aus den Seitenverhältnissen rechtwinkliger Dreiecke bieten, ist für uns noch die Aufgabe No. 50[2]) von Interesse, indem sie ein Quadrat zu finden lehrt, welches einer Kreisfläche gleich sein soll. Bezeichnet d den Durchmesser des Kreises, so wird als Seite des Quadrates $d - \frac{d}{9}$ angegeben. Hieraus folgt für das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser: $\pi = (\frac{16}{9})^2 = 3{,}1604\ldots$. Wie man auf diese merkwürdige Zahl gekommen ist, darüber lassen sich nur Vermutungen aufstellen[3]), während ihr Vorhandensein durch wiederholte Anwendung sicher gestellt ist.

Wenn uns ein glücklicher Zufall in den Stand setzte, die ersten trigonometrischen Verhältnisse in einem ägyptischen Papyrus zu ent-

---

1) Vgl. Cantor I. 59—60, dessen Interpretation wir uns hier anschliefsen. — 2) Eisenlohr, Handbuch 124. Damit in Verbindung stehen auch die Aufgaben No. 41, 42 und 48. p. 100—109 und 117. Vgl. M. Cantor I. 57. — 3) Vgl. M. Curtze, Abhandl. zur Geschichte der Mathematik, Heft 8. 1898. p. 63.

decken, dessen Alter bis in die frühesten Epochen menschlicher Kultur zurückreicht, so kommt uns kein solch' günstiger Umstand bei der Aufsuchung der zweiten Quelle trigonometrischer Lehren, nämlich der rechnenden Astronomie zu statten, während doch gerade ihr, wenigstens in späterer Zeit, unsere Wissenschaft ihre Ausbildung verdankt. Es besteht nämlich kein Zweifel, dafs sowohl die Ägypter, als auch und vielleicht noch früher die Chaldäer die Astronomie im Anschlufs an die Pseudowissenschaft der Astrologie mit grofser Vorliebe pflegten, die einen, indem sie sich nach der Angabe griechischer Schriftsteller[1]) graphischer Verfahren bedienten, die anderen durch Verwendung rechnender Methoden, mögen diese auch noch so unvollkommen gewesen sein. Dennoch berichtet uns leider über dieselben kein bis jetzt aufgefundenes Dokument Näheres, so dafs wir nur auf Vermutungen angewiesen sind, von welchen wir eine, die sich auf die graphischen Methoden der Ägypter bezieht, bei Schilderung der griechischen Trigonometrie ins Auge fassen werden. Hoffentlich werden die in den letzten Jahrzehnten mit so grofsem Eifer betriebenen Studien über ägyptische und babylonische Altertümer auch auf diese mathematisch-astronomischen Fragen bald ein neues Licht werfen.

Aufser den Ägyptern und Chaldäern erhebt ein anderes Volk den Anspruch, zu den ältesten Kulturvölkern der Erde zu zählen, nämlich das in vieler Hinsicht so merkwürdige Volk der Chinesen. Da dieselben bekanntlich eine besondere Vorliebe für das Alte haben, und Kenntnisse und Erfindungen bei ihnen nur dann Wert besitzen, wenn sie ein hohes Alter aufweisen können, so sind sie gewohnt, ihre Zeitangaben mit sehr geringer Gewissenhaftigkeit zu behandeln, und der unparteiische Forscher ist daher gehalten, dieselben stets mit einer gewissen Vorsicht zu benützen. Überhaupt ist es ja eine noch keineswegs gelöste Frage, ob die mathematischen und astronomischen Kenntnisse der Chinesen ihnen völlig eigentümlich sind, oder etwa auf chaldäischen Ursprung zurückgeführt werden müssen. Manches spricht für die Richtigkeit der letzteren Ansicht, obwohl man einen Beweis erst dann wird erbringen können, wenn einmal Näheres über die Pflege der Wissenschaften bei jenem Volke bekannt ist.

Die unzweifelhaft älteste Schrift der Chinesen über Mathematik,

1) Theon Smyrnaeus. Edit. Dupuis. 287 sagt: ...*φέροντες οἱ μὲν ἀριθμητικάς τινας, ὥσπερ Χαλδαῖοι, μεθόδους, οἱ δὲ καὶ γραμμικάς, ὥσπερ Αἰγύπτιοι,...* und ähnlich Porphyrius, De vita Pythagorica. Ed. Kiefsling 12. Vgl. ferner: Bretschneider, Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. Leipzig 1870.

die bis jetzt vollständig veröffentlicht und von E. Biot übersetzt vorliegt, ist der Tcheou-pei-swan-king, d. h. „Heiliges Buch der Rechnung, genannt Tcheou-pei.“ Da pei das Gnomon und Tcheou der Kreis heifst, so kann Tcheou-pei auch „Gnomon im Kreise“ bedeuten, kann sich aber auch auf jene Persönlichkeit unter der Tcheōu-Dynastie beziehen, die nach dem ersten Teile des in Dialogform geschriebenen Werkes zu schliefsen, von dem Gelehrten Schang-kao unterrichtet wird. In diesem Falle würde die Abfassung des Werkes um das Jahr 1100 vor Christus zu setzen sein. Im zweiten Teile der aus zwei Abschnitten bestehenden Schrift sind zwei andere nicht weiter bekannte Persönlichkeiten redend eingeführt: Tschin-tsoe belehrt den Yung-fang und zwar in weit ausführlicherer Weise, als dies in dem äufserst kurzen ersten Teile geschieht. Die beiden Abschnitte gehören denn auch ihrer Entstehung nach keineswegs derselben Zeit an, denn für den zweiten Teil ergiebt sich als Zeit seiner Abfassung die Periode zwischen 213 vor und etwa 300 nach Chr.[1]). Übrigens sind auch die in diesem Abschnitte behandelten Wahrheiten so einfacher Natur, dafs sie ganz gut schon in jener frühen Zeit, welcher der erste Teil wahrscheinlich angehört, bekannt gewesen sein können.

Für uns hat nur eine Stelle am Beginn des Werkes[2]) einiges Interesse. Es heifst nämlich daselbst: Der kuu, das ist ein zur Messung bestimmtes rechtwinkliges Dreieck, ein Winkel, wie auch wir ihn benützen, dient zum Ziehen gerader Linien; der Yen-kuu, d. h. dieses Dreieck aufgerichtet, dient zur Höhenmessung; der Fo-kuu, d. h. dasselbe Dreieck abwärts gerichtet, wird zur Tiefenmessung benützt, und endlich der Ngo-kuu, d. i. das Dreieck (in die Ebene) umgeklappt, dient zur Messung der Entfernungen. Diese verschiedenen Verwendungen des rechtwinkligen Dreieckes zu Höhen-, Tiefen- und Distanzmessungen weisen darauf hin, dafs der Verfasser des Tcheou-pei mit der Ähnlichkeit rechtwinkliger Dreiecke bekannt war und vielleicht, ähnlich wie die Ägypter, aus Verhältnissen Winkel zu bestimmen vermochte. Im zweiten Abschnitte der Schrift finden sich einige astronomische Bestimmungen mit Hilfe des Gnomons, die aber nicht mehr trigonometrische Kenntnisse zeigen, als die eben angeführten Daten. Auch der Umstand, dafs das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser stets gleich 3 gesetzt wird[3]), be-

1) Ed. Biot, Traduction et examen d'un ancien ouvrage chinois intitulé Tcheou pei, littéralement: Style ou signal dans une circonférence. Journal Asiatique 1841. p. 595 ff. Vgl. auch Cantor I. 636. — 2) Ebenda p. 601. — 3) A. a. O. 613, 614, 617.

weist gerade keine hervorragenden mathematischen Kenntnisse — die Bekanntschaft der Chinesen mit dem Archimedischen Werte $\pi = 3\frac{1}{7}$ gehört wahrscheinlich erst dem sechsten Jahrhundert n. Chr. an, und Liu-hwuy, der im 7. Jahrhundert gelebt haben soll, bediente sich des Wertes $\frac{157}{50} = 3{,}14$ [1]). Erst aus dem Anfang des 7. Jahrhunderts n. Chr. haben wir Nachricht von einem Handbuche der Trigonometrie „Tschau-pe-swan-king“ [2]) von Tschau-Tschwang, welches allerdings als eine revidierte Ausgabe eines viel älteren Werkes ausgegeben wird. Endlich soll während der Yuen-Dynastie, etwa um 1300 n. Chr. Ko-Schau-king die sphärische Trigonometrie eingeführt haben [3]). Wir sehen also, dafs eigentliche trigonometrische Kenntnisse einer Zeit angehören, in welcher die Araber und Perser längst ausgebildete trigonometrische Systeme besafsen, die ohne Zweifel schon zur Kenntnis der Chinesen gelangt waren. Anspruch auf eine frühere Ausbildung trigonometrischer Lehren dürfen wir ihnen also keineswegs zusprechen.

Wenden wir uns nach dieser geringen Ausbeute, die unsere Forschungen in der Litteratur der ältesten Völker geliefert haben, dem begabtesten Volke des Altertums, den Griechen, zu, deren Kultur und geistige Entwickelung sich im Laufe der Zeit zu solcher Höhe emporschwang, dafs sie Jahrhunderte lang als Basis für die Bildung der Völker des Abend- und Morgenlandes diente. Aber auch die hochentwickelte Kultur der Griechen ist nicht von selbst entstanden, sondern sie beruht, wie die Forschungen der Neuzeit unwiderleglich nachgewiesen haben, namentlich in wissenschaftlicher Beziehung, auf ägyptischer und babylonischer Grundlage. Besonders in der Mathematik und Astronomie waren die ägyptischen und chaldäischen Priester die ersten Lehrmeister der Griechen, und zu ihnen wanderten die lernbegierigen Söhne Hellas' bis zur Mitte des 5. Jahrhunderts vor Chr. hinüber und brachten manches Samenkorn des Wissens mit, das sich unter der Pflege ihres gewandten und von den Fesseln der Priesterherrschaft freien Geistes bald zu hoher Blüte entfaltete.

Auf ägyptischen Ursprung weisen daher auch die wenigen Anfänge trigonometrischer Messungen hin, die uns aus den ältesten Zeiten des Griechenvolkes überliefert sind. So wird erzählt [4]), dafs

---

1) Biernatzki „Die Arithmetik der Chinesen.“ Journal für reine und angewandte Mathematik 1856. LII. 73, 74 und Cantor I. 641. — 2) Biernatzki p. 68. — 3) Ebenda 70. — 4) Diogenes Laertius erzählt dies I. c. 1. n. 2, indem er es aus den Denkwürdigkeiten des Hieronymus, eines Schülers von Aristoteles, schöpft.

Thales von Milet, der zwischen 624 und 548 vor Chr. lebte und sich längere Zeit in Ägypten aufhielt, die Höhe der Pyramiden mittelst ihres Schattens gemessen habe und zwar, indem er denselben bestimmte, wenn seine Länge mit der Höhe des zu messenden Gegenstandes übereinstimmte. Dafs hier nur durch die Ungeschicklichkeit des späteren Berichterstatters gerade die Pyramide, bei welcher diese Art von einfachster Messung nicht anwendbar ist, genannt wird, dürfte keinem Zweifel unterliegen. Übrigens kannte Thales unzweifelhaft auch das Verfahren, welches die Ähnlichkeit der Dreiecke benützt, denn sonst wäre es ihm wohl nicht möglich gewesen, die Entfernung der Schiffe vom Hafen von Milet zu bestimmen, wie Proklus von ihm berichtet[1]). Wahrscheinlich nahm er diese Messung vor, indem er von einem hohen Standpunkte, etwa einem Turm aus, den Winkel bestimmte, welchen die von dem Beobachtungsorte nach dem Schiffe gezogene Gerade mit der Vertikalen bildete. War nun die Höhe des Turmes schon vorher gemessen, so konnte man mit Hilfe der Ähnlichkeit (aber geometrisch auch nur mit dieser) auf die Entfernung des Schiffes vom Fufspunkte des ersteren schliefsen. Man erkennt auf den ersten Blick, in welch' innigem Zusammenhange diese Messung mit der Bestimmung des Seqt bei den Ägyptern steht, und Thales hat sie sicher bei diesen gelernt und hiermit die Anfänge einer geometrischen Proportionslehre in Griechenland bekannt gemacht[2]).

In enge Beziehung zur Trigonometrie traten später auch die Schattenmessungen mittelst des Gnomons, und dieses weist hinwiederum auf babylonischen Ursprung hin, denn Herodot[3]) sagt ausdrücklich: „Die Sonnenuhr und das Gnomon sowie die Einteilung des Tages in 12 Stunden erhielten die Griechen von den Babyloniern." In Hellas scheint das Gnomon zuerst Anaximandros, ein Zeitgenosse und Schüler des Thales (wahrscheinlich 611 geboren), eingeführt zu haben, denn Diogenes Laertius berichtet von ihm, dafs er in Sparta ein solches aufstellte[4]). Man erkennt sofort, dafs die Bestimmung der Sonnenhöhe aus den Längen von Gnomon und Schatten auf das Tangentenverhältnis des Höhenwinkels führt;

---

1) Proklus, Kommentar zum 1. Buche der Elemente Euklids, Zitat aus Eudemus. Ed. Basil. p. 92. — 2) Dahin ist die Bemerkung Bretschneiders a. a. O. p. 75 zu verbessern, der diese Einführung erst dem Pythagoras zuerkennt. Vgl. darüber auch Cantor I. 67, sowie 146 und 153—155. — 3) Herodot B. II. 109. Die Einwirkung chaldäischer Astronomie auf die griechische ergiebt sich übrigens auch aus verschiedenen Stellen des Ptolemäischen Almagest. — 4) Ähnlich auch Suidas. s. v. *Ἀναξίμανδρος*.

jedenfalls hat aber Anaximander nur eine geometrische Konstruktion desselben vollzogen — Näheres ist uns hierüber nicht überliefert. Das eine nur wissen wir, dafs derselbe aufser einem Buche über die „Sphäre", d. h. über die Kreise an der Himmelskugel[1]), auch einen Abrifs der zeichnenden Geometrie verfafste, was wiederum auf ägyptischen Ursprung seiner Kenntnisse hinweist. All' dies, vereinigt mit Konstruktion von Gnomon und Sonnenuhr, kann auf die Vermutung führen, man habe in seinen Leistungen die Anfänge einer graphischen Behandlung sphärischer Dreiecke zu suchen, wie wir sie im folgenden Kapitel kennen lernen werden.

Das bisher Mitgeteilte zeigt uns, dafs die Griechen in jener ältesten Zeit, wenigstens soweit uns die Überlieferungen Material an die Hand geben, nicht weit über jene Kenntnisse hinausgingen, die sie von ihren Lehrmeistern, den Ägyptern und Babyloniern erhalten hatten, und auch in der Blütezeit der griechischen Mathematik, als Alexandria durch das Machtwort des grofsen Eroberers entstanden und die Hauptstadt von Ägypten, die Metropole der Wissenschaft geworden war (um das Jahr 300), finden wir daselbst keine Spur von einer Ausbildung trigonometrischer Lehren. Dieselben wurden eben erst dann zu einem eigentlichen Bedürfnis, als ein Aufschwung der Astronomie stattfand. Erst bei dem Astronomen Aristarch von Samos, der um 270 vor Chr. lebte, begegnen wir daher einem schwachen Versuche, trigonometrische Verhältnisse rechnerisch zu bestimmen. Von ihm ist uns nämlich noch ein kleines Schriftchen erhalten[2]), in welchem er das Verhältnis der Entfernungen des Mondes und der Sonne von der Erde, sowie die Verhältnisse der Durchmesser dieser Gestirne zu bestimmen sucht. Die von ihm angewandte geistreiche Methode[3]) ist heute noch in der Astronomie unter dem Namen der Methode der Monddistanzen bekannt und basiert auf der Bestimmung des Winkels, den die Verbindungslinien der Erd- und Mondmittelpunkte mit dem der Sonne miteinander bilden, wenn der Mond im Viertel steht. Da in diesem Falle das Dreieck Sonne—Erde—Mond an letzterem rechtwinklig ist, so treten hier trigonometrische Verhältnisse auf, und die Richtigkeit von Aristarch's Resultat wird nur dadurch beeinträchtigt, dafs er den

---

1) Bretschneider a. a. O. 61 und 62. — 2) *Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης*, deutsch von Nizze. 1856. Lateinische Übers. von Commandinus 1572. — 3) P. Tannery „Aristarque de Samos." Mém. de la Soc. des sc. de Bordeaux. Serie 2. t. V. 241 ff. glaubt, dafs schon Eudoxus, ein Schüler des Platon (zwischen 409 und 356) sich dieser Methode bedient habe.

fraglichen Winkel zu grofs, nämlich gleich 3^0 statt $\frac{1}{2}^0$ annahm. Die Verhältnisse, zu welchen er gelangt, bestimmt er dadurch, dafs er sie zwischen zwei Grenzen einschliefst, und zwar findet er[1]):

$\frac{1}{18} > \sin 3^0 > \frac{1}{20}$; $\frac{1}{45} > \sin 1^0 > \frac{1}{60}$; $1 > \cos 1^0 > \frac{89}{90}$ und $1 > \cos 1^0 > \frac{44}{45}$.

Wohl noch älter, als diese von Aristarch gegebenen trigonometrischen Verhältnisse, dürften gewisse Formeln sein, welche sich in den feldmesserischen Werken des um das Jahr 100 vor Chr.[2]) lebenden Heron von Alexandrien finden, indem sie, wie die ganze Geometrie Herons, direkt auf ägyptischen Ursprung hinweisen und von den Griechen vielleicht nur wenig verbessert wurden. Wir

---

1) Ed. Commandinus prop. VIII, XII, XIII, XIV. Um die Methode, deren er sich zur Herstellung dieser Verhältnisse bediente, zu erläutern, teilen wir die Ableitung des ersten mit: Bei S, E und M (Fig. 2) mögen Sonne, Erde und Mond stehen, dann ist $\sphericalangle EMS = 90^0$. $SABE$ sei das Quadrat über SE, $\sphericalangle AEC = \sphericalangle CEB = 22\frac{1}{2}^0$, $\sphericalangle DEB = \sphericalangle ESM = 3^0$, $DF \parallel EB$, dann geht der Kreis über ED durch F. Indem nun mit einem beliebigen Radius EG ein Kreis um E beschrieben wird, ergiebt sich durch eine einfache geometrische Betrachtung

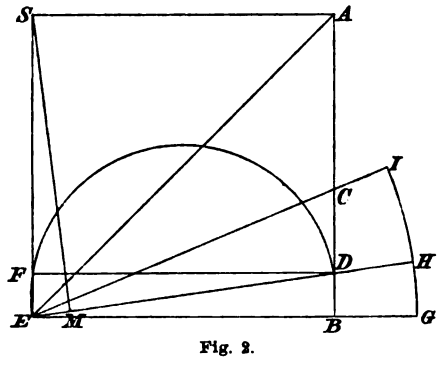


Fig. 2.

$$\frac{CB}{DB} > \frac{\text{Sect. } IEG}{\text{Sect. } HEG},$$

also $\frac{CB}{DB} > \frac{22\frac{1}{2}^0}{3^0} = \frac{15}{2}$. Da ferner $\frac{AB}{CB} = 1 + \frac{AC}{CB} = 1 + \frac{AE}{EB} = 1 + \sqrt{2}$ und $\sqrt{2} < \frac{7}{5}$ ist, so folgt: $\frac{AB}{CB} > \frac{12}{5}$. Durch Multiplikation dieser beiden Ungleichungen kommt dann: $\frac{AB}{DB} > 18$ oder $\frac{SE}{EM} > 18$, d. h. $\sin 3^0 < \frac{1}{18}$; ferner ist $EF = EM$ die Sehne des Peripheriewinkels von 3^0, also Bg. $EF = 6^0 = \frac{60^0}{10}$, und die Sehne von 60^0 ist $\frac{1}{2}ED$, also ist $EM > \frac{1}{10}$ der Sehne v. 60^0, oder $EM > \frac{ED}{20}$, und folglich $\frac{ED}{EM} = \frac{SE}{EM} < 20$; d. h. $\sin 3^0 > \frac{1}{20}$. — Vgl. hierüber auch R. Wolf, Geschichte der Astronomie. München 1877. p. 172—173, sowie P. Tannery, Aristarque de Samos, a. a. O. — Der Hauptsatz, auf welchem die Methode des Aristarch beruht, lautet: Das Verhältnis zweier Sehnen ist kleiner als das ihrer Bögen. Einen Beweis für diesen Satz gibt Aristarch nicht. — 2) Ph. H. Martin, Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie. Mémoires présentés par divers savants à l'académie des inscriptions et des belles lettres. Serie I. Paris 1854. Cantor I. 347. Die geometrischen Schriften Herons sind von Hultsch herausgegeben: Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae. Berlin 1864.

wollen sie daher gleich hier anführen. An drei Stellen[1]) der Schriften Herons finden sich nämlich Formeln, durch welche der Inhalt regelmäfsiger Vielecke durch das Produkt des Quadrates der Seite in gewisse Zahlen gegeben wird. Bezeichnet man den Inhalt des Polygons von n Seiten mit I_n, die Seite mit s_n, so lauten dieselben folgendermafsen: $I_3 = \frac{13}{30} s_3^2$; $I_5 = \frac{12}{7} s_5^2$ und $= \frac{5}{3} s_5^2$; $I_6 = \frac{13}{5} s_6^2$; $I_7 = \frac{43}{12} s_7^2$; $I_8 = \frac{29}{6} s_8^2$; $I_9 = \frac{51}{8} s_9^2$ und $= \frac{38}{6} s_9^2$; $I_{10} = \frac{15}{2} s_{10}^2$; $I_{11} = \frac{66}{7} s_{11}^2$; $I_{12} = \frac{45}{4} s_{12}^2$. Da nun aber $I_n = \frac{n}{4} s_n^2 \operatorname{ctg} \frac{180^0}{n}$ ist, so erhellt sofort die trigonometrische Bedeutung der Zahlenkoeffizienten. P. Tannery hat eingehende Untersuchungen über den wahrscheinlichen Ursprung dieser Formeln angestellt[2]) und kommt zu dem Schlusse, dafs sie keiner allgemeinen Methode ihre Entstehung verdanken, sondern einzeln durch sehr einfache Verfahren erhalten wurden. Auch wir glauben nicht, dafs sich Heron etwa einer zu seiner Zeit allerdings schon bekannten Sehnentafel zu ihrer Berechnung bediente[3]), sonst würde er einerseits sicher eine gröfsere Annäherung erzielt haben, als sie seine Formeln bieten, und andrerseits hätte er statt der gewöhnlichen Brüche, die in der Astronomie allgemein gebräuchlichen Sexagesimalbrüche sicher verwendet, zumal in diesen, wie wir sehen werden, auch die Sehnentafeln der Griechen hergestellt waren. Gerade hieraus glauben wir schliefsen zu dürfen, dafs die mitgeteilten Formeln zu jenen Überbleibseln ägyptischer Feldmefskunst gehören, die Heron zweifelsohne bei Abfassung seiner praktisch-geometrischen Schriften zu Gebote standen.

Wie wir sehen, fand sich schon Aristarch in die Lage versetzt, bei seinen astronomischen Rechnungen trigonometrische Verhältnisse zu bilden; und in der That war es auch die Astronomie, an welcher sich in der Folgezeit die Trigonometrie zu einer wissenschaftlichen Methode heranbildete. Erst mit dem Aufschwung, den jene Wissenschaft unter dem grofsen Hipparch nahm, konnte daher von einer eigentlichen Trigonometrie der Griechen die Rede sein, die wir in dem nächsten Kapitel schildern wollen.

---

1) Heron Geometria 102. Mensurae 51—53. Liber Geeponicus 75—77 und 172—179. Ed. Hultsch 134. 206. 218. 229. — 2) P. Tannery. Arithmétique des Grecs dans l'Héron d'Aléxandrie. Mémoires de la soc. des sc. de Bordeaux. t. IV. 1880. — 3) Vgl. hierzu Cantor's abweichende Ansicht. I. p. 370—371.

2. Kapitel.

Die Trigonometrie der Griechen.

§ 1. Die graphische Methode und die Vorläufer des Ptolemäus.

Hipparch, der Vater der Astronomie, wie ihn die Griechen nannten, ist in Nicaea geboren und lebte um 150 v. Chr. teils in Rhodus, teils in Alexandrien[1]). Er wird auch als der Begründer der Trigonometrie bezeichnet, wobei man sich hauptsächlich auf zwei Stellen stützt. Die eine findet sich in dem Kommentar, den Theon von Alexandrien (um 365 n. Chr.) zum Almagest des Ptolemäus[2]) schrieb, und lautet dahin, dafs Hipparch 12 Bücher über die Berechnung der Sehnen eines Kreises aus den Winkeln geschrieben hat, von denen sich jedoch keine Spur mehr findet; die andere Stelle ist in der einzigen Schrift Hipparchs enthalten, die auf uns gekommen ist und aus dem Kommentar zu den Sternbeschreibungen des Eudoxus und Aratus besteht[3]). Er teilt uns hier mit, dafs er in einem früheren Werke all' das in jenem Kommentar Benützte, „durch Zeichnung" bewiesen habe[4]). Die von ihm verwendete Methode scheint also eine graphische gewesen zu sein. Man[5]) hat allerdings geglaubt, darin eine Anspielung auf jene von Theon erwähnte Sehnenrechnung sehen zu müssen, jedoch besteht nach unserer Ansicht keine Veranlassung, seine Worte künstlich in dieser Weise umdeuten zu müssen, da die Griechen thatsächlich eine rein graphische Methode zur Auflösung sphärischer Dreiecke besafsen, die uns überhaupt die älteste trigonometrische Methode zu sein scheint. Die Grundzüge derselben dürften bis auf die ägyptische und babylonische

---

1) Es geht dies aus Beobachtungen hervor, welche von ihm 126 und 161 v. Chr. angestellt sind und uns in dem Almagest des Ptolemäus lib. III. c. 1 und lib. V. c. 3 mitgeteilt werden. — 2) Commentaire de Théon d'Alexandrie sur le premier livre de la composition mathématique de Ptolemée. Traduit par Halma. Paris 1821. 110. — 3) *Τῶν Ἱράτου καὶ Εὐδόξου φαινομένων ἐξηγήσεων βιβλία γ'*; mit einer lateinischen Übersetz. veröffentlicht in dem Uranologion des Petavius. Lutetiae 1630 in 2°; neuerdings mit deutscher Übers. herausgegeben von C. Manitius. Leipzig 1894. — 4) Die Stelle lautet (lib. II. c. 2): „*Ἕκαστον γὰρ τῶν εἰρημένων ἀποδείκνυται διὰ τῶν γραμμῶν ἐν ταῖς καθόλου περὶ τῶν τοιούτων ἡμῖν συντεταγμέναις πραγματείαις.*" Ed. Pet. 218. Ed. Manitius. 150 und 151. — 5) Das Nähere über diese Frage siehe in A. v. Braunmühl: „Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie." Nova acta der k. Leop.-Carol. deutschen Akademie d. Naturforscher B. LXXI. 4 ff.; künftig mit „Beiträge" zitiert.

Astronomie zurück zu leiten sein, da sie jedenfalls die nächstgelegene und unmittelbar an die Beobachtung sich anschliefsende Methode der Ortsbestimmung auf der Kugel ist[1]). Erhalten ist sie uns in einer Schrift des Claudius Ptolemaeus aus dem zweiten Jahrhundert n. Chr., die den Titel führt: *Περὶ ἀναλήμματος*. Von dem griechischen Texte sind nur mehr Bruchstücke vorhanden[2]), dagegen besitzen wir eine lateinische Ausgabe von F. Commandinus vom Jahre 1562 mit einem guten Kommentar desselben[3]). Analemma bedeutet soviel wie Hilfsfigur, und in der That behandelt die Schrift die Konstruktion derjenigen Figuren, welche zur Verfertigung einer praktisch verwendbaren Sonnenuhr notwendig sind. Der Kern der hierzu verwendeten Methode aber besteht in der Orthogonalprojektion der Kugel auf drei zu einander senkrechte Ebenen: den Meridian, den Horizont und den Vertikalkreis[4]). Will man auch den ägyptisch-chaldäischen Ursprung dieser Methode nicht zugeben, so wird man sich doch der Ansicht nicht entziehen können, dafs sie das älteste den Griechen bekannte Verfahren war; und da dasselbe sich nicht nur auf die Bestimmung der Sonnenörter, sondern auch auf die Auf- und Untergänge der Sterne anwenden läfst, so wird es wohl Hipparch in der oben angeführten Stelle im Auge gehabt haben, indem es thatsächlich *διὰ τῶν γραμμῶν* das Gewünschte zu leisten vermag[5]). Diese Anschauung steht keineswegs mit der Mit-

---

1) Strenge Beweise lassen sich hierfür allerdings bis jetzt nicht anführen, wohl aber spricht der Umstand dafür, welchen C. Riel in seiner Schrift „Das Sonnen- und Sirius-Jahr der Ramessiden" Leipzig 1875 in 4° p. 239 und 294 sehr wahrscheinlich macht, „dafs die Ägypter bereits ein nach der Polarprojektion entworfenes Planisphär mit dem Nordpol als Mittelpunkt hatten". (P. Tannery weist die Erfindung dieses Instrumentes Apollonius von Pergae zu, Recherches sur l'astronomie. Paris 1893. 52.) Mithin dürfte ihnen die einfachere und näherliegende Orthogonalprojektion um so mehr bekannt gewesen sein. Andererseits weifs man, dafs Hipparch in vielen Dingen ein Schüler der Chaldäer war und zuerst in Griechenland die Einteilung des Winkels in Grade, Minuten und Sekunden einführte. Vgl. hierüber: Lenormant, Essai sur un document mathématique chaldéen. Paris 1868. 8°., woselbst auch die Belege für diese Ansicht angeführt sind. — 2) Neuerdings hat J. L. Heiberg diese Bruchstücke mit der Übersetzung des Wilh. von Moerbecke, eines Dominikanermönches aus Ostflandern aus der 2. Hälfte des 13. Jahrh. herausgegeben. Zeitschr. f. Math. u. Phys. Suppl. z. 40. Jahrg. 1 ff. — 3) Dieser Ausgabe, die den Titel führt: Cl. Ptolemai liber de Analemmate, Romae 1562 in 4°., liegt die Übersetzung Wilh. von Moerbeckes zugrunde. — 4) Ed. Commandinus carta 3. — 5) Dafs Hipparch in der That im Besitze graphischer Methoden war, geht auch daraus hervor, dafs er auch das auf der stereographischen Projektion beruhende Planisphärium kannte. Vgl. hierüber: Reinaud Géographie d'Aboulfeda. Paris 1848. 4°. I. p. 50 und 262 der Ein-

teilung Theons im Widerspruch, nach welcher Hipparch im Besitze trigonometrischer Methoden war, um sphärische Dreiecke direkt rechnerisch zu lösen; denn wir werden sehen, dafs auch die Araber, welche bereits eine hochausgebildete Trigonometrie besafsen, sich immer noch nebenher der Methode des Analemmas bedienten, ja dafs dieselbe sogar im Abendlande noch bis in das 17. Jahrhundert herein verwendet wurde.

Es handelt sich im Analemma darum, den Ort der Sonne zu einer bestimmten Tageszeit zu ermitteln. Da es nun zur Einsicht in die Methode genügt, wenn man die Sonne im Äquator annimmt, was zur Zeit der Äquinoktien eintritt, die Figuren aber durch diese Annahme wesentlich einfacher werden, so wollen wir diesen speziellen Fall näher ins Auge fassen.

Es befinde sich die Sonne, von dem Orte C mit der Polhöhe φ aus gesehen, im Punkte Σ (Fig. 3a), SZN ist der Meridian, Z der

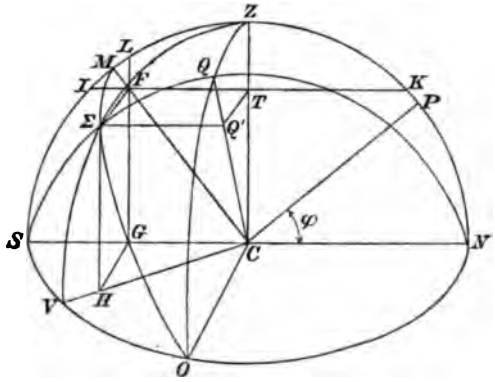


Fig. 3a.

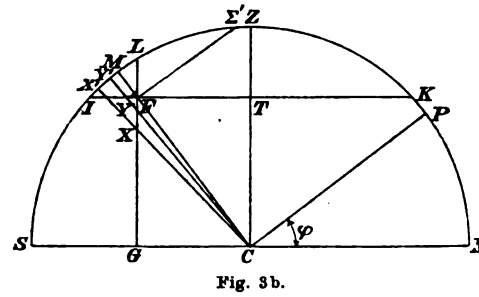


Fig. 3b.

Zenit, SNO der Horizont, OMC der Äquator, P der Pol, OZC der erste Vertikal, der gröfste Kreis $S\Sigma N$ heifst nach einer sonst nicht gebräuchlichen Bezeichnung der Stundenkreis, während der gröfste Kreis durch Σ und den Ost- und Westpunkt, der in unserem Falle, da die Deklination Null ist, mit dem Äquator zusammenfällt, Hektemoron heifst. Legt man noch durch Σ den Vertikal $Z\Sigma V$, dann sind als bekannt zu betrachten: arc. $\Sigma O = 90^0 - t$, wo t den Stundenwinkel bezeichnet, und arc. $MS = 90^0 - \varphi$, während gesucht werden: aus Dreieck ΣVO die Sonnenhöhe ΣV und die Aszensionaldifferenz VO und aus $\triangle \Sigma OQ$: QO und ΣQ. Man projiziert nun[1]) Σ senkrecht

leitung und R. Wolf, Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur. Zürich 1890. II. 70. Dieses Werk zitieren wir künftig kurz: Wolf, H. A.

1) Analemma, Ed. Commandinus, carta 15 und 16, wo Ptolemäus nur die

auf die Meridianebene nach F, auf den Horizont nach H und auf den ersten Vertikal nach Q', fällt $FG \perp SN$, $Q'T \perp CZ$ und zieht HG, dann ist $FG = \Sigma H$, $GH = F\Sigma$. Da $\Sigma O = 90^0 - t$ gegeben ist, so findet man die Lage von F, indem man in einer Nebenfigur (Fig. 3b), auf welcher der Äquator in Stunden geteilt ist, $\Sigma O = P\Sigma'$ abliest und Σ' auf den Durchmesser CM, dessen Lage durch die Polhöhe φ bestimmt ist, nach F projiziert. Es wird dann $\Sigma'F = \Sigma F$, wie man durch Umklappen der Äquatorebene in die Meridianebene erkennt. Zieht man noch in beiden Figuren $IFK \parallel SN$ und $LFG \parallel ZC$, so erkennt man, dafs arc. ZI = arc. $Z\Sigma = 90^0$ — arc. ΣV ist, da durch Umklappen der Ebene des Vertikals ΣZV in die Meridianebene Σ auf I zu liegen kommt. Somit ist in Fig. 3b arc. IS gleich dem gesuchten Bogen ΣV. — Um arc. OV zu finden, macht man in Fig. 3b $GX = F\Sigma'$, zieht CX, das den Meridian in X' schneidet und hat arc. ZX' = arc. OV. Die Richtigkeit dieser Konstruktion folgt, indem man den Horizont in die Meridianebene umklappt, wodurch H nach X kommt, da $GX = GH = \Sigma F = \Sigma'F$ gemacht wurde, während der Radius CHV auf den Radius CXX' zu liegen kommt. Also ist auch arc. SV = arc. SX'. — Zur Bestimmung von Bogen QO oder ZQ macht man endlich in Fig. 3b $TY = F\Sigma'$, CY schneidet dann den Meridian in Y', und arc. SY' = arc. QO. Denn klappt man den ersten Vertikal in die Meridianebene um, so kommt Q' nach Y und der Radius $CQ'Q$ fällt auf CYY'. Endlich ist arc. $S\Sigma$ = arc. SL, da L und Σ in der zur Meridianebene senkrechten Ebene $L\Sigma HG$ liegen.

Die zu dieser graphischen Konstruktion verwendeten Linien sind $\Sigma'F = \Sigma F = \sin t$ (Radius = 1), und die die Lage von F bestimmenden Stücke $FT = CF \sin\varphi$ und $FG = CF \sin(90^0 - \varphi)$. Also sind die gesuchten Bögen hier aus ihren Sinussen konstruiert, während sich die Griechen in der rechnenden Trigonometrie stets der Sehnen bedienten. Dafs Ptolemäus den Vorteil, der in der Verwendung der halben vor den ganzen Sehnen liegt, aus diesen Konstruktionen nicht erkannte, hat wohl seinen Grund darin, dafs er sowohl die graphische, als die Sehnenmethode von seinen Vorgängern überkam und jede nur für sich in der einmal gewiesenen Richtung zu vervollkommnen strebte. Überhaupt findet sich kein Anhaltspunkt dafür, dafs die Griechen es jemals versuchten, die Projektionsmethode mit der Rechnung in Ver-

Konstruktion angibt, während Commandinus die Ableitung beifügt. Vgl. auch Delambre, Histoire de l'Astronomie ancienne, Paris 1817. 4°. t. II. 458—504 über das Analemma. Übrigens behandelt Ptolemäus auch den Fall einer beliebigen Deklination: carta 12^v—14^v und 19^r—20^r.

bindung zu setzen, wie es nachmals von den Indern und Arabern geschah.

Aufser dieser graphischen Methode, die Hipparch zweifelsohne schon besafs, bediente sich derselbe, wie bereits erwähnt, auch seiner Sehnentafeln. Dieser bedurfte er z. B. zur Berechnung der Oberfläche der bewohnten Erde, die er nach den Überlieferungen Strabo's durch eine Art Triangulation vollzog[1]). Dabei griff er das Verfahren des Eratosthenes energisch an, der sich bei demselben Probleme noch ohne trigonometrische Rechnung zu behelfen gesucht hatte[2]). Wie Hipparch seine Sehnentafel berechnet hat, dafür haben wir leider keinen Anhaltspunkt, wir wissen nur, dafs das von Ptolemäus mitgeteilte Berechnungsverfahren gegenüber dem älteren eine wesentliche Vereinfachung aufweist[3]). Auf dasselbe werden wir weiter unten zu sprechen kommen, wenn wir unsere Kenntnisse über die Entwickelung der griechischen Trigonometrie in der Zeit zwischen Hipparch und Ptolemäus dargelegt haben.

Da begegnen wir nun zunächst dem Astronomen Menelaus von Alexandrien, der um das Jahr 98 n. Chr. in Rom lebte[4]). Auch von ihm wird berichtet, dafs er 6 Bücher über Sehnen geschrieben habe, die aber leider ebensowenig auf uns gekommen sind, wie die 12 Bücher Hipparchs. Dagegen ist uns eine Sphärik dieses Astronomen erhalten[5]), die unser Interesse in hohem Mafse erregt. Denn wohl hatte nach Anaximander auch Autolykus von Pitane um 330 v. Chr. ein Buch über die Sphäre geschrieben[6]), hatte Euklid seine Phänomena[7]) und um 180 v. Chr. der Alexandriner

---

1) Vgl. hierüber H. Berger, Geschichte der wissenschaftlichen Erdkunde der Griechen. 3. Abteil. p. 135 ff. — 2) Ebenda p. 105. Dafs um jene Zeit trigonometrische Methoden schon allgemein bekannt waren, geht auch aus Polybius (203—121) IX. 19 hervor, der die Möglichkeit, die Höhe einer Mauer aus der Ferne trigonometrisch zu messen, erwähnt. Vgl. hierüber Berger a. a. O. 4. Abt. p. 29—31 incl. Hierauf wurde ich durch S. Günther aufmerksam gemacht. — 3) Commentaire de Théon 110. — 4) Ptolemäus Almagest lib. 7 teilt zwei Beobachtungen desselben mit. Die Berechung der Jahreszahl derselben bei Ideler, „Historische Unters. über die astron. Beobachtungen der Alten." Berlin 1806. 8°. 35. — 5) Menelai sphaericorum libri tres sind von F. Maurolykus v. Messina zum ersten Male aus arabischen und hebräischen Handschr. ins Lateinische übersetzt worden und 1558 in 2°. erschienen. Diese Ausgabe lag uns vor. Später hat Halley eine neue Ausgabe besorgt. Oxoniae 1758 in 8°. — 6) De sphaera quae movetur liber unus und eine zweite Schrift: De ortibus et occasibus libri duo. Neueste Ausgabe von Heiberg. 1886. 8°. — 7) Von dieser Schrift gibt es mehrere Ausgaben; die älteste ist von Barth. Zamberti aus dem Jahre 1505. Übersetzt und erläutert von Nokk 1850. 8°.

Hypsikles ein Schriftchen über die Auf- und Untergänge der Sterne verfafst[1]), und Theodosius von Tripolis ebenfalls eine Sphärik gegeben[2]), aber in allen diesen Schriften findet sich keine Spur trigonometrischer Rechnungen. Ganz anders das Werk des Menelaus. Dasselbe gibt in grofser Vollständigkeit diejenigen geometrischen Sätze, auf welche sich die Trigonometrie der Griechen aufbaute und behandelt im letzten Buche schon die Beziehungen zwischen Sehnen und Bogen, so dafs es wahrscheinlich ist, dafs die verlorene Sehnenrechnung sich unmittelbar an dieses Buch anschlofs. Es scheint uns daher unbedingt notwendig, auf den reichhaltigen Inhalt des Werkes näher einzugehen, zumal derselbe bisher nicht in der wünschenswerten Weise gewürdigt wurde.

Schon gleich in der 2. prop. des I. Buches wird der sphärische Winkel eingeführt und in der prop. 3 folgt die Definition des sphärischen Dreieckes, dessen Eigenschaften hier zum erstenmale in der uns bekannten Litteratur eingehend behandelt werden. Unter anderem findet sich in prop. XX der Satz bewiesen, dafs die Winkelsumme des sphärischen Dreieckes zwischen zwei und sechs Rechten liegt; die Kongruenzsätze sind bis auf einen vollständig angegeben, und an die in prop. XXVI nachgewiesene Bestimmtheit des Dreieckes durch Angabe seiner drei Winkel ist die Bemerkung geknüpft, dafs hieraus für die sphärischen Dreiecke eine Menge von Eigenschaften folgen, die den ebenen Dreiecken nicht zukommen. Weiter finden sich die Sätze über die Nichtkongruenz von Dreiecken, die nur in 2 Stücken übereinstimmen, eingehend auseinandergesetzt. — Am wichtigsten sind aber für uns die Lehren, welche Menelaus im dritten Buche vorträgt. Dasselbe beginnt mit jenem Satze, der nachmals die Bezeichnung „Transversalensatz des Menelaus“ erhalten hat und ihm zu den beiden Gleichungen Anlafs gibt[3]): .

---

1) *Ἀναφορικός*. Herausgegeben von K. Manitius 1888. Osterprogramm des Gymn. v. hl. Kreuz in Dresden. Hier scheint die babylonische Einteilung des Kreises in 360° zum erstenmale enthalten zu sein. Vgl. Cantor I. 344. — 2) Die Sphärik ist zum erstenmale 1558 in Paris erschienen, deutsch von Nizze, Stralsund, und von demselben griechisch und lateinisch, Berlin 1852. — Obgleich diese Schrift längst nach Entstehung der Sehnenrechnung zustande kam, so enthält sie doch nichts über Trigonometrie, nicht einmal die Bezeichnung sphärisches Dreieck kommt darin vor, während sie eine sehr vollständige geometrische Theorie der Kugelkreise umfafst. — Alle die erwähnten Schriften sind uns dadurch erhalten geblieben, dafs sie später in eine Sammlung aufgenommen wurden, welche der „kleine Astronom“ hiefs und jenen zum Studium diente, die sich nach Durcharbeitung des Euklid mit dem Almagest beschäftigen wollten. — 3) Die Ausdrucksweise der Griechen, die natürlich solche

$$\frac{GE}{AE} = \frac{GZ}{DZ} \cdot \frac{DB}{AB} \text{ und } \frac{GA}{AE} = \frac{GD}{DZ} \cdot \frac{ZB}{BE}. \quad \text{(Fig. 4.)}$$

Dafs die Figur noch zwei weitere ähnliche Gleichungen liefert, gemäfs dem Umstande, dafs man jede der 4 Linien als Transversale des aus den drei übrigen gebildeten Dreieckes auffassen kann, erkannte weder Menelaus noch sein Nachfolger Ptolemäus[1]), da sie nicht von dem Gedanken ausgingen, ein Dreieck durch eine Transversale zu schneiden, sondern die Beziehung der Linien BE und GD zu den Linien BA und GA ins Auge fafsten. Menelaus überträgt nun (in lemma 4 und prop. II) diesen Transversalensatz sofort auf die Kugel, indem er wieder an zwei verschiedenen Figuren die folgenden beiden Analogien nachweist[2]):

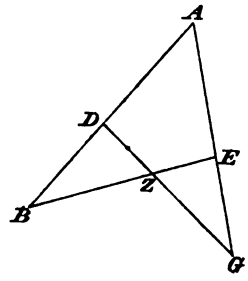


Fig. 4.

$$\frac{\text{crd}(2GE)}{\text{crd}(2AE)} = \frac{\text{crd}(2GZ)}{\text{crd}(2DZ)} \cdot \frac{\text{crd}(2DB)}{\text{crd}(2BA)} \text{ und } \frac{\text{crd}(2GA)}{\text{crd}(2AE)} = \frac{\text{crd}(2GD)}{\text{crd}(2DZ)} \cdot \frac{\text{crd}(2ZB)}{\text{crd}(2BE)},$$

welche sich aus der in Fig. 5 dargestellten aus Bögen gröfster Kreise bestehenden Figur ergeben[3]). Dieser Satz, der später den Namen der „Regula sex quantitatum“ erhielt, bildet das Fundament der sphärischen Trigonometrie der Griechen, die aus ihm allein hervorgeht. Es ist dies insofern ein bemerkenswerter Umstand, als es sonst eine Eigentümlichkeit der griechischen Geometrie ist, stets die für jeden Einzelfall nötigen Sätze eigens zu entwickeln, statt sie wie hier durch Spezialisierung eines allgemeinen Theorems zu erhalten.

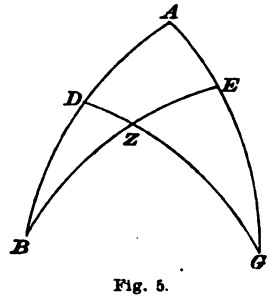


Fig. 5.

Gleichungen nur in Worten anführen, ist folgende: „Es steht GE zu AE im zusammengesetzten Verhältnis von GZ zu DZ und DB zu AB“; unsere Schreibweise $GE \cdot DZ \cdot AB = AE \cdot GZ \cdot DB$ kannten sie nicht.

1) Der Kommentator Theon erkannte wohl die beiden noch fehlenden Relationen (Theon Commentar. Ed. Halma. 234 und 238), aber auch er sah nicht, dafs sie die einzigen 4 Relationen dieser Art sind, und stellte daher noch zwei andere auf, deren Identität mit zweien jener Fundamentalformeln aus unserer Schreibweise unmittelbar ersichtlich ist. — 2) Statt des griechischen Wortes εὐθεῖα haben wir hier das lateinische chorda in der Abkürzung crd, das wir auch beibehalten werden, geschrieben; wir bemerken übrigens, dafs Maurolykus in seiner Ausgabe der Sphärik, den Arabern folgend, statt der Sehnen überall den Sinus schreibt. — 3) Ptolemäus hat den ersten dieser Sätze samt Beweis dem Menelaus entnommen (Almagest lib. I. c. 11. Ed. Halma 54—55, Ed. Heiberg 74—75), den zweiten jedoch nicht bewiesen. Theon füllte in seinem Kommentar (a. a. O.

Ob Menelaus der Erfinder der nach ihm benannten Fundamentaltheoreme ist, oder ob schon Hipparch dieselben kannte, läfst sich nicht mehr endgiltig entscheiden[1]), wenn auch das letztere sehr wahrscheinlich ist.

Aufser dieser Regel der sechs Gröfsen findet sich aber in der Sphärik des Menelaus noch ein Satz[2]), welcher später in der Entwickelungsgeschichte der Trigonometrie grofse Bedeutung gewonnen hat, indem er zu der sogenannten „Regula quatuor quantitatum" Anlafs gab. Satz III im 3. Buche heifst nämlich folgendermafsen: Wenn zwei Dreiecke ABG und DEZ (Fig. 6), die Winkel A und D und G und Z bezüglich gleich haben, oder wenn sich diese Winkel zu 180^0 ergänzen, so besteht die Gleichung:

$$\frac{\text{crd}\,(2AB)}{\text{crd}\,(2BG)} = \frac{\text{crd}\,(2DE)}{\text{crd}\,(2EZ)}.$$

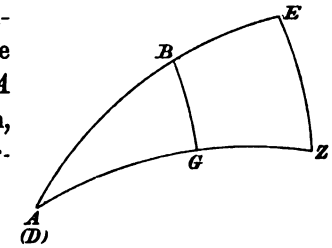


Fig. 6.

Legt man nun die beiden Dreiecke so aufeinander, dafs sich die gleichen Winkel A und D decken und nimmt speziell $\sphericalangle G = \sphericalangle Z = 90^0$, so gibt diese Gleichung genau die Regel der vier Gröfsen, wie sie nachmals von den Arabern und den Astronomen des Abendlandes benützt wurde. Von nicht geringer Bedeutung ist ein dritter Satz[3]), der bisher ebensowenig wie der eben angeführte beachtet wurde, indem er, wie sich zeigen wird, zu der „Tangentenregel" der Araber führte. In prop. V. lib. III heifst es nämlich: Hat man die beiden Dreiecke ABG und DEZ (Fig. 7), die bezüglich bei A und D rechtwinklig sind und in den Winkeln G und Z übereinstimmen, und legt man das letztere Dreieck so auf das erstere, dafs diese Winkel sich decken, verlängert dann die

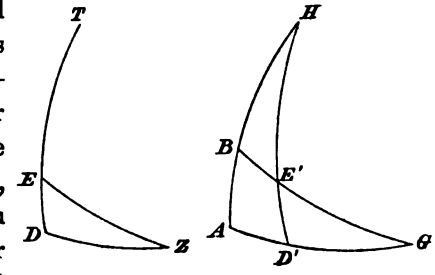


Fig. 7.

Ed. Halma 241) diese Lücke aus und zeigte aufserdem, wie man die 2. Gleich. direkt aus der ersten erhalten kann.

1) Delambre a. a. O. t. I. 245 neigt sich dieser Ansicht zu, und M. Chasles, Geschichte der Geometrie, deutsch v. Sohncke 1839. 299, glaubt sogar, dafs der Satz schon in den Porismen des Euklid gestanden habe. — 2) Darauf habe ich zuerst in meiner Abhandlung: Nassîr Eddîn Tûsi und Regimontan. Abhandl. der k. Leopold.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher B. LXXI. 1897. p. 42 aufmerksam gemacht. — 3) Vgl. die eben zitierte Abhandlung p. 47 ff., wo gezeigt ist, wie aus diesem Satze unmittelbar die „Tangentenregel" des Arabers Abû'l Wafâ hervorging.

Bögen AB und $D'E'$, bis sie sich im Pole H von AG schneiden und macht $DT = 90^0$, so besteht die Gleichung:

$$\frac{\text{crd}\,(2AB)}{\text{crd}\,(2AG)} = \frac{\text{crd}\,(2ED)}{\text{crd}\,(2DZ)} \cdot \frac{\text{crd}\,(2BH)}{\text{crd}\,(2ET)},$$

die sofort mit Beachtung von $DZ = D'G$, $ET = E'H$, $ED = E'D'$ in $\frac{\text{tg}\,AB}{\text{tg}\,E'D'} = \frac{\sin AG}{\sin D'G}$, die „Tangenten- oder Schattenregel" der Araber übergeführt werden kann[1]). Aufser diesen Hauptsätzen bemerken wir noch die Gleichung

$$\frac{\text{crd}\,2(c+b)}{\text{crd}\,2(c-b)} = \frac{\text{crd}\,180^0 + \text{crd}\,(180^0 - 2A)}{\text{crd}\,180^0 - \text{crd}\,(180^0 - 2A)}\,^2),$$

oder in unserer Sprache $\frac{\sin(c+b)}{\sin(c-b)} = \frac{1+\cos A}{1-\cos A}$, welche sich auf ein bei C rechtwinkliges Dreieck bezieht, dessen Seiten mit c, b, a, und dessen Winkel mit C, B, A bezeichnet werden. Hieran schliefst sich eine ganze Reihe von Sätzen, welche teils Beziehungen zwischen den Sehnen von Bogenstücken festlegen, die bei der Teilung eines Dreieckswinkels in mehrere gleiche Teile auf der gegenüberliegenden Dreiecksseite entstehen, teils solche Relationen zwischen den Seiten zweier Dreiecke herstellen, die gewisse Stücke gemeinsam haben. Methoden zur Berechnung sphärischer Dreiecke sind allerdings nirgends angeführt, doch dürfte kein Zweifel bestehen, dafs die mitgeteilten Sätze zur Vorbereitung auf sie dienten. Eine vollständige Kenntnis dieser Methoden sowie der hierzu dienlichen Sehnenrechnung der Griechen gewinnen wir erst aus dem grofsen Werke des Alexandriners Claudius Ptolemaeus, welches in der Zeit zwischen 125 und 151 nach Chr.[3]) verfafst wurde und den Titel führt *„Κλαυδίου Πτολεμαίου μαθηματικὴ (μεγάλη) σύνταξις"*. In der späteren Litteratur heifst es allgemein „der Almagest"[4]). Wir werden daher diese kostbare Hinterlassenschaft des griechischen Altertums, insoweit sie für unsere Zwecke von Interesse ist, eingehend besprechen, indem

---

1) Für $AG = 90^0$ folgt: $\frac{\text{tg}\,G}{\text{tg}\,E'D'} = \frac{\sin 90^0}{\sin D'G}$; vgl. Almagest lib. I. c. XII. Ed. Halma I. 60. Ed. Heiberg 82—83. — 2) a. a. O. lib. III. prop. III. — 3) Cantor I. 387—388. F. Boll, Studien über Cl. Ptolemäus. Ein Beitrag zur Geschichte der griechischen Philosophie und Astrologie. Leipzig 1894, fixiert die Lebenszeit des grofsen Astronomen von 100—178. Aufser der mit einer französischen Übersetzung versehenen Ausgabe des Abbé Halma. 2 Bände. Paris 1816. 4°. ist jüngst Pars I einer Neuausgabe von Heiberg, Leipzig bei Teubner in 8° erschienen. — 4) Über die Entstehung des Wortes Almagest siehe Koppe: Die Lehre von den Logarithmen und dem Sinus im Unterricht. Programm des Andreas-Gymnasiums in Berlin 1893.

wir zuerst die Sehnenrechnung und dann die Trigonometrie behandeln, wie sie im 1. Buche des Almagest, mit dem IX. Kapitel beginnend, entwickelt sind.

§ 2. Die Sehnenrechnung der Griechen.

Ptolemäus teilt zunächst den Kreisumfang in 360 und den Durchmesser in 120 Teile, *τρήματα*, in welchen er die Sehnen nach dem Sexagesimalsystem ausdrückt, um, wie er sagt, Brüche zu vermeiden. Es wird nämlich der Radius in 60^p, diese in $60'$ und diese wieder in $60''$ geteilt: partes, partes minutae primae und partes minutae secundae heifsen sie in den späteren lateinischen Übersetzungen, woher unsere Bezeichnung Minuten und Sekunden stammt. Hieraus folgt für den Radius $r = 60^3 = 216000$ Sekunden, und somit ist $1'' = 0{,}000004629\ldots\, r$. Das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser setzt Ptolemäus $3^p\,8'\,30'' : 1 = \frac{377}{120} = 3{,}14166\ldots$[1]), während es Archimedes bekanntlich zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ fand.

Es sind im Ganzen vier Hauptprinzipien, mit deren Hilfe die Tafel der Sehnen von 30 zu 30 Minuten der Winkel berechnet wird — eine Tafel, die bis ins 10. Jahrhundert und darüber allen astronomischen Rechnungen zugrunde gelegt wurde[2]).

I. Nach den Sätzen Euklids werden die Seiten des regelmäfsigen Drei-, Vier-, Fünf-, Sechs- und Zehneckes in Teilen des Radius ausgedrückt, woraus sich folgende Sehnen ergeben: $\operatorname{crd} 36^0 = 37^p\,4'\,55''$; $\operatorname{crd} 72^0 = 70^p\,32'\,3''$; $\operatorname{crd} 60^0 = 60^p$; $\operatorname{crd} 90^0 = 84^p\,51'\,10''$; $\operatorname{crd} 120^0 = 103^p\,55'\,23''$. Da aber die Sehnen zweier Bögen, welche sich zu einem Halbkreis ergänzen, quadriert und addiert das Quadrat des Durchmessers geben, so hat man hiermit auch die Sehnen der Supplementarbögen der vorigen; z. B.

$$\operatorname{crd}(180^0 - 36^0) = \operatorname{crd}(144^0) = \sqrt{120^2 - (\operatorname{crd} 36^0)^2} = 114^p\,7'\,37''.$$

II. In Form eines Lemmas wird der sogenannte Ptolemäische Satz, dafs in einem Kreis-Vierecke die Summe der Rechtecke aus je zwei Gegenseiten gleich dem Rechteck aus den beiden Diagonalen ist, aufgestellt und bewiesen[3]), und mit seiner Hilfe werden die

---

1) Almagest VI. c. 7. Ed. Halma I. 421. Ed. Heiberg 513. — 2) Eine sehr schöne Darstellung der Sehnenrechnung und der Trigonometrie des Ptolemäus bei Ideler: Die Trigonometrie der Alten. Zach: Monatliche Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde. Juli 1812. XXVI B.; vgl. auch Cantor I. 389—392 und R. Wolf, H. A. I. 163—165. — 3) Almagest. Ed. Halma I. 29—31. Ed. Heiberg 36—39.

Sehnen der Summe und der Differenz zweier Längen berechnet, also die Additionsformeln der trigonometrischen Funktionen gegeben[1]).

III. wird die Sehne des halben Bogens aus jener des ganzen in folgender Weise bestimmt. Es sei die Sehne $GB = a$ gegeben, und D halbiere den Bogen GB; man sucht $DG = \text{crd}\frac{BDG}{2}$. Macht man $AE = AB = a'$ auf Durchmesser AG, dann ist $\triangle ABD \sim \triangle ADE$; also auch $DE = DB = DG$, also $\triangle EDG$ gleichschenklig, also $EZ = ZG = \frac{1}{2}(AG - AB)$. Da nun $BG = a$ bekannt ist, so ist auch $AB = a'$ und somit ZG bekannt. Da aber $\triangle ADG$ rechtwinklig ist, so folgt hieraus $GD = \sqrt{2r \cdot GZ}$. Soweit Ptolemäus; setzt man in die letztere Gleichung den Wert von GZ ein, so kommt

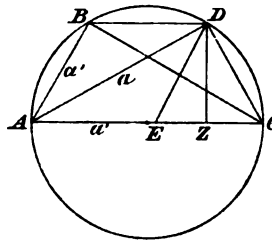


Fig. 8.

$$GD = \sqrt{r(2r - a')},$$

welche Formel für $r = 1$, und arc $BG = 2\alpha$ in $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$ übergeht. Hiermit findet man z. B. aus crd 12^0 die Sehnen von 6^0, 3^0, dann crd $1\frac{1}{2}^0 = 1^p\,34'\,15''$ und endlich crd $\frac{3}{4}^0 = 0^p\,47'\,8''$. Verbindet man jetzt die unter II. und III. gegebenen Sätze miteinander, so

---

1) Sind in dem Kreisviereck (Fig. a) $ABGD$, $AG = a$, $AB = b$ gegeben, so kennt man auch die Supplementarsehnen $DG = a'$, $DB = b'$, und die gesuchte Sehne $GB = x$ der Differenz der Bögen AG und AB ist, wenn $AZ = r$ den Radius des Kreises bezeichnet:

$$x = \frac{a \cdot b' - a' \cdot b}{2r};$$

so ergibt sich z. B. crd. 12^0 aus crd 72^0 und crd 60^0 zu $12^p\,32'\,56''$.

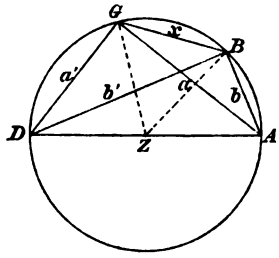


Fig. a.

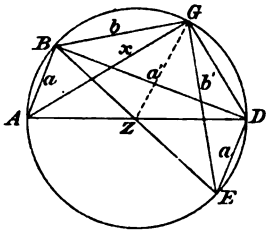


Fig. b.

Setzt man $\sphericalangle AZG = 2\alpha$, $\sphericalangle AZB = 2\beta$ und $r = 1$, so setzt sich diese Formel unmittelbar in $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ um. Um die Sehne der Summe zweier Bögen zu erhalten, hat man (Fig. b) crd $AB = a$, crd $BG = b$, also auch $BD = a'$, $EG = b'$, und es folgt aus dem Viereck $BGDE$: $GD = \frac{a'b' - ab}{2r}$, woraus sich $x = AG = \sqrt{4r^2 - GD^2}$ ergibt. Für $\sphericalangle AZB = \alpha$ und $\sphericalangle BZG = \beta$ und $r = 1$ geht diese Formel leicht über in unsere: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. Ptolemäus setzt bei seiner Ableitung arc AB + arc $BG < 180^0$ voraus, eine Beschränkung, die Theon später in seinem Kommentar p. 195, Ed. Halma aufhebt. In dieser Verwendung des Ptolemäischen Satzes dürfte wohl die von Theon angeführte Vereinfachung der Sehnenrechnung gegenüber seinem Vorgänger Hipparch teilweise liegen.

kann man die Sehnen der sämtlichen Bögen in Intervallen von je $1\frac{1}{2}^0$ berechnen. Somit bleibt nur noch die Bestimmung der Sehnen jener Winkel übrig, welche innerhalb des Zuwachses von $1\frac{1}{2}^0$ liegen. Zu diesem Behufe leitet Ptolemäus sehr scharfsinnig eine IV. Methode ab, die auf ein Interpolationsverfahren hinauskommt. Damit umgeht er die Dreiteilung des Winkels, welche die Sehne von $\frac{1}{2}^0$ direkt aus jener von $\frac{3}{2}^0$ liefern, aber die Auflösung einer Gleichung 3. Grades erfordern würde. Es sei (Fig. 8) $\text{arc.}\,AB < \text{arc.}\,BG$ beliebig gegeben, dann ist $\frac{GB}{AB} < \frac{\text{arc.}\,BG}{\text{arc.}\,AB}$; es ist dies derselbe Satz, dessen sich schon Aristarch bediente (Seite 8. Anm. 1), doch beweist ihn Ptolemäus, während ihn jener als bekannt voraussetzte. Ist nun $AB = \text{crd}\,\frac{3}{4}^0$, $BG = \text{crd}\,1^0$, dann ist $\frac{BG}{AB} < \frac{4}{3}$, also $BG < \frac{4}{3}AB$. Aber es wurde bereits gefunden $AB = 0^p\,47'\,8''$, also $\text{crd}\,1^0 < 1^p\,2'\,50''$. Ist ferner $AB = \text{crd}\,1^0$, $BG = \text{crd}\,\frac{3}{2}^0 = 1^p\,34'\,15''$, so folgt $\frac{BG}{AB} < \frac{3}{2}$, also $\text{crd}\,1^0 > 1^p\,2'\,50''$. Da also die Grenzen, zwischen denen die Sehne von 1^0 eingeschlossen ist, nicht mehr um einen Sexagesimalteil der zweiten Ordnung voneinander entfernt sind, so kann man $\text{crd}\,1^0 = 1^p\,2'\,50''$ setzen[1]). Hieraus folgt dann unter Anwendung von III. $\text{crd}\,\frac{1}{2}^0 = 0^p\,31'\,25''$, und man hat jetzt die Mittel, um die Tafel von $\frac{1}{2}^0$ zu $\frac{1}{2}^0$ zu berechnen, womit sich Ptolemäus begnügt. Die so berechnete Tafel besteht aus drei Columnen. In der ersten links befinden sich in zwei Spalten die Bögen in Graden (*περιφερειῶν*) und Minuten, die zweite zeigt neben jedem Bogen seine Sehne und hat daher drei Spalten für Sechzigteile (*μοιραί*), Minuten (*ἑξηκοστὰ πρῶτα*) und Sekunden (*δεύτερα*) der Sehnen (*εὐθειῶν*). In der dritten Columne steht neben jeder Sehne der dreifsigste Teil dessen, was zu ihr kommen mufs, um die nächste Sehne zu geben, und zwar ist dieser Bruchteil auf Minuten, Sekunden und Terzen berechnet. Ihre Über-

---

1) Ptolemäus sagt wörtlich (Ed. Halma I. 36. Ed. Heiberg 46): *ὥστε, ἐπεὶ τῶν αὐτῶν ἐδείχθη καὶ μείζων καὶ ἐλάσσων ἡ τὴν μίαν μοῖραν ὑποτείνουσα εὐθεῖα καὶ ταύτην δηλονότι ἕξομεν τοιούτων ᾱ β′ ν″ ἐγγιστα, οἷων ἐστὶν ἡ διάμετρος ϱ̄x̄.*“ Eigentlich ergibt sich für $\text{crd}\,1^0 < 1^p\,2'\,50''\,12'''$, diese $12'''$ werden aber von Ptolemäus als belanglos weggelassen. — Fr. Woepcke hat dieses Verfahren mit der Lagrange'schen Interpolationsmethode geprüft (Liouville, Journal de Mathématiques 1854. 160 und 165) und gefunden, dafs der hierbei begangene Fehler $< \frac{1}{10^8}$ ist und keinen Einfluſs auf den Genauigkeitsgrad der Tafel ausübt, da hierbei nur Gröfsen vernachlässigt werden, die $< \frac{1}{2}''$ sind; dagegen würde dieser Fehler, der der Methode anhaftet, sofort fühlbar werden, wenn die Gröfsen der Tafel auf Terzen, Quarten etc. berechnet wären, was auch die Araber, wie wir später sehen werden, sehr wohl bemerkten.

schrift ist ἑξηκοστῶν, womit angedeutet sein soll, dafs die in ihr stehenden Zahlen zu den Minuten oder Sechzigsteln des Grades gehören. Wir lassen eine Probe der Tafel hier folgen, wie sie in der Ausgabe von Halma p. 38 ff. angegeben ist[1]), (Ed. Heiberg 48—63).

KANONION ΤΩΝ ΕΝ ΚΥΚΛΩ ΕΥΘΕΙΩΝ								
Περιφερειῶν		*Εὐθειῶν*			*Ἑξηκοστῶν*			
Μοιρῶν		*M*	*Π*	*Δ*	*M*	*Π*	*Δ*	*T*
0	30	0	31	25	0	1	2	50
1	0	1	2	50	0	1	2	50
1	30	1	34	15	0	1	2	50
2	0	2	5	40	0	1	2	50
2	30	2	37	4	0	1	2	48
3	0	3	8	28	0	1	2	48

Zum Vergleiche mit unsern Sinustafeln rechnen wir z. B. die Sehne von $1^0\,0'$, welche $1^p\,2'\,50''$ beträgt in den sin $30'$ für Radius 1 um. Das gibt:

$$\sin 30' = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{crd}\,(1^0\,0') = 0^p\,31'\,25'' = \tfrac{1885^p}{3600} = \tfrac{1885}{60\cdot 3600} = 0{,}0087268,$$

während eine unserer siebenstelligen Tafeln 0,0087265 gibt, also stimmen die beiden Werte in 6 Dezimalen überein. Eine eingehendere Prüfung zeigt jedoch, dafs die 6. Stelle nicht überall sicher ist. Somit hat Ptolemäus in seiner Sehnentafel eine von 30 zu 30 Sekunden fortschreitende in den ersten 5 Dezimalen genaue Tafel geliefert[2]).

---

1) Vgl. Kaestner, Geschichte der Mathematik. Göttingen 1796. 8°. I. 515. — In der Ausgabe von Halma steht im griechischen Text statt der Null ὁ, Ptolemäus hatte also wenigstens ein Zeichen für das Fehlen der Einheiten, während die Griechen die eigentliche Null nicht verwandten. Nesselmann, Algebra der Griechen. Berlin 1842. 92; Cantor I. 118. — Das *T* in der Tafel bedeutet τρίτα; ferner läuft diese von 0° bis 180°, Bögen, die gröfser als 180° sind, kommen überhaupt nicht vor. Almagest I. c. 11. Ed. Halma I. 31. Ed. Heiberg 47. — 2) Vgl. hierüber Ideler a. a. O. 23. — Mit den in der Tafel angegebenen Dreifsigsteln der Differenzen kann man die Sehne irgend eines zwischenliegenden Winkels bequem ausrechnen. Will man z. B. crd 72° 15′, so steht bei crd 72° = $70^p\,32'\,3''$ unter ἑξηκοστῶν: $0^p\,0'\,50''\,45'''$ als Zuwachs für 1′. Das 15fache hiervon gibt $12'\,41''\,15'''$. Also ist crd $72^0\,15' = 70^p\,44'\,44''\,15'''$. Es ist hierbei vorausgesetzt, dafs die Zunahme der Sehne im Verhältnis der Zunahme des Bogens stattfindet, eine Voraussetzung, deren Richtigkeit innerhalb der angenommenen Grenzen Ptolemäus übrigens nicht beweist.

§ 3. Die Trigonometrie des Ptolemäus und seiner Nachfolger.

Im XI. Kapitel des ersten Buches seiner „Grofsen Zusammenstellung", welches die Überschrift trägt: „Vorbereitungen für die sphärischen Sätze" beginnt Ptolemäus seine eigentliche Trigonometrie, indem er zunächst den uns schon bekannten Transversalensatz für Ebene und Kugel vorausschickt und dann in zwei Sätzen zeigt[1]), wie man aus dem Verhältnis der Sehnen zweier Bögen AB und BG, die einzeln $< 180^0$ sind und ihrer Summe oder Differenz die einzelnen Bögen selbst finden kann. Wir wollen für den Fall, dafs die Summe der Bögen gegeben ist, die Rechnung, wie sie Ptolemäus ausführt, in unserer Schreibweise darstellen, einmal, weil dieselbe ein anschauliches Bild von der Art und Weise der Rechnung gibt, wie sie die Griechen in solchen Fällen vollzogen, und weil uns andererseits dieser Satz noch oft begegnen wird.

Sei in Fig. 9 arc. $AB = \alpha$, arc. $BG = \beta$, so ist bekannt $\frac{\text{crd } 2\alpha}{\text{crd } 2\beta} = \lambda$ und $\alpha + \beta = \sigma = \text{arc. } AG$, während α und β gesucht werden. Sei $DZ \perp AG$, $GX \perp BD$ und $AI \perp BD$, dann ist zunächst $\sphericalangle ADZ = \frac{\sigma}{2}$, und somit $AZ = \frac{1}{2}\text{crd } \sigma$, also auch $AG = 2AZ = \text{crd } \sigma$ bekannt. Aber $AE : GE = AI : GX = \text{crd } 2\alpha : \text{crd } 2\beta = \lambda : 1$. Hieraus folgt:

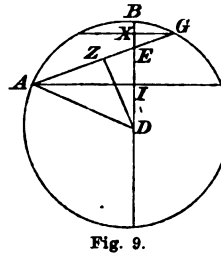


Fig. 9.

$$\frac{AE + GE}{AE} = \frac{AG}{AE} = \frac{\lambda + 1}{\lambda}$$

und somit $AE = \frac{\lambda \text{ crd } \sigma}{1 + \lambda}$ und $EG = \frac{\text{crd } \sigma}{1 + \lambda}$. Also ist $ZE = AE - AZ = \frac{\lambda - 1}{2(\lambda + 1)} \text{crd } \sigma$. Da ferner $DZ = \sqrt{AD^2 - AZ^2} = \sqrt{r^2 - \frac{\text{crd}^2 \sigma}{4}}$ bekannt ist, so ist auch, wie Ptolemäus angibt, $\sphericalangle EDZ$ bekannt. Uns würde sich dieser Winkel unmittelbar aus $\text{tg } EDZ = \frac{ZE}{ZD}$ ergeben; da aber der Grieche keine Tangenten kennt, so mufs er erst $ED = \sqrt{ZD^2 + EZ^2}$ berechnen und kann dann $\text{crd}(2ZDE) = 2r\frac{ZE}{ED}$ setzen, woraus sich mittelst der Sehnentafel $\sphericalangle ZDE = \frac{\tau}{2}$ ergibt. Nimmt man hierzu $\sphericalangle ADZ = \frac{\sigma}{2}$, so folgt jetzt $\alpha = \text{arc. } AB = \frac{\sigma + \tau}{2}$ und $\beta = \text{arc. } BG = \frac{\sigma - \tau}{2}$[2]).

---

1) A. a. O. Ed. Halma I. 52 ff., Ed. Heiberg 70 ff. — 2) Diese Rechnung war entschieden ein für die Griechen schwieriges Problem und zeigt, dafs schon

Nach diesen Vorbereitungen wendet nun Ptolemäus die schwerfällige Regel der 6 Gröſsen oder den Transversalensatz stets direkt auf die jeweiligen astronomischen Probleme an, wobei jedoch immer nur rechtwinklige Dreiecke zugrunde gelegt werden. Schiefwinklige Dreiecke behandelten die Griechen nur, indem sie dieselben durch einen senkrechten Bogen in zwei rechtwinklige zerfällten. Wir führen für diese Methode ein Beispiel an: Es sei aus Ekliptikschiefe ($\sphericalangle A$ in Fig. 10) und Länge (arc. c) die Deklination (arc. a) der Sonne zu bestimmen[1]). Verlängert man die Seiten b und c des bei C rechtwinkligen $\triangle ABC$, so daſs $AB' = AC' = 90^0$ werden und legt dann den gröſsten Kreisbogen $B'C'$, der die verlängerte Seite a in S trifft, so ist S der Pol von arc. AC', also auch $SC = SC' = 90^0$ und der Transversalensatz gibt

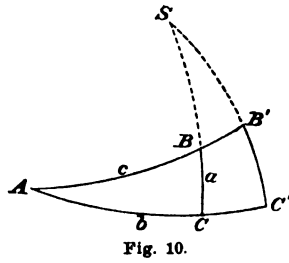


Fig. 10.

$$\frac{\text{crd } 2BC}{\text{crd } 2SC} = \frac{\text{crd } 2AB}{\text{crd } 2AB'} \cdot \frac{\text{crd } 2B'C'}{\text{crd } 2SC'},$$

oder da arc. $B'C' = \sphericalangle A$, so ist:

$$\frac{\text{crd } 2a}{\text{crd } 180^0} = \frac{\text{crd } 2c}{\text{crd } 180^0} \cdot \frac{\text{crd } 2A}{\text{crd } 180^0},$$

woraus schlieſslich $\text{crd } 2a = \frac{\text{crd } 2c \cdot \text{crd } 2A}{\text{crd } 180^0}$ folgt[2]). Setzen wir diese Formel in unsere Bezeichnungsweise um, so ergibt sich die bekannte Gleichung: $\sin a = \sin c \cdot \sin A$, die also implicite hier in Anwendung kommt.

Wenn man nun in dieser Weise die im Almagest behandelten astronomischen Aufgaben durchgeht und die jedesmal in Anwendung kommende Form des Transversalensatzes in die uns geläufige Gestalt umschreibt, so findet man, daſs die beiden von Ptolemäus angewandten

---

Ptolemäus zur Anwendung der Verhältnisse der Sehnen doppelter Bögen gezwungen war, so daſs man sich wundern muſs, daſs er nicht auf den Gedanken kam, die halben Sehnen einzuführen. Den Gang der Rechnung hat schon Delambre a. a. O. II. 43 mitgeteilt, jedoch entspricht seine Darstellung nicht ganz der des Ptolemäus (I. 52). Dagegen hat er in seinen Noten zur Almagestausgabe von Halma 3. und 6., sowie in seiner Hist. del Astr. auc. II. 43—44 gezeigt, wie man diese Aufgabe einfacher mit Einführung der Tangenten lösen kann.

1) Almagest lib. I. c. XII. Ed. Halma 57. Ed. Heiberg 82—83. — 2) Wir heben hier ausdrücklich hervor, daſs die Griechen keinerlei Formelschreibweise, wie etwa die im Texte angewandte beſaſsen, sondern alle ihre Verhältnisse in Worten aussprachen.

Gleichungen dieses Satzes folgende 4 unserer 6 Fundamentalformeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck umschliefsen:

$$\text{I. } \sin a = \sin c \cdot \sin A,$$
$$\text{II. } \operatorname{tg} a = \sin b \cdot \operatorname{tg} A,$$
$$\text{III. } \cos c = \cos a \cdot \cos b,$$
$$\text{IV. } \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cdot \cos A^{1}).$$

Die beiden noch fehlenden Gleichungen V. $\cos A = \cos a \cdot \sin B$ und VI. $\cos c = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B$ konnte Ptolemäus bei der Art, wie er den Transversalensatz handhabte, nicht finden, obgleich sie sich aus Fig. 10 unmittelbar ergeben, wenn man die Gleichungen II und IV auf $\triangle SBB'$ anwendet. Von den vier den Griechen bekannten Analogien gestatten aber nur I und III die unmittelbare Aufsuchung des gewünschten Stückes mit der Sehnentafel, während II und IV, da ihnen die Kenntnis der Tangenten fehlte, erst umgeformt werden mufsten. So lautet z. B. II in der Schreibweise der Alten:

$$\frac{\operatorname{crd} 2a}{\operatorname{crd}(180^0 - 2a)} = \frac{\operatorname{crd} 2b}{\operatorname{crd} 180^0} \cdot \frac{\operatorname{crd} 2A}{\operatorname{crd}(180^0 - 2A)} = q.$$

Ist die rechte Seite q bekannt, so folgt hieraus leicht

$$\operatorname{crd}(2a) = 2r\sqrt{\frac{q^2}{1+q^2}},$$

da $\operatorname{crd} 180^0 = 2r$ ist. In dieser Form findet sich nun allerdings die Rechnung bei Ptolemäus nirgends ausgeführt[2]), woraus übrigens keineswegs folgt, dafs er überhaupt nicht imstande war aus II oder IV die gesuchte Gröfse direkt zu finden, ohne dafs er sich Tangententabellen berechnet hatte[3]), von denen sich in der griechischen Litteratur keine Spur findet. Denn zur Berechnung des Winkels a aus II dient gerade jenes Lemma, das Ptolemäus seinen Anwendungen vorausschickt, und das wir auf Seite 23. auseinandersetzten. Man braucht in demselben nur $\alpha = a$, $\beta = 90^0 - a$ zu

1) Die drei letzten Formeln findet man z. B. in folgenden Aufgaben des Almagest, wo sie an erster Stelle vorkommen: II. in lib. I. c. XII. Ed. Halma 60. Ed. Heiberg 82: Bestimmung der Rektaszension aus Ekliptikschiefe und Deklination; III. in lib. II. c. II. Ed. Halma 68. Ed. Heiberg 91: Aus der gegebenen Dauer des längsten Tages Morgen- und Abendweite zu berechnen; IV. in lib. II. c. II. Ed. Halma 69—70. Ed. Heiberg 92—93: Die Polhöhe aus dem Azimut des Aufgangspunktes der Sonne und der Dauer des längsten Tages zu finden. Natürlich finden sich dieselben Formeln noch an vielen anderen Stellen angewendet. — Wir werden sie im Folgenden kurz als Fundamentalformeln mit den ihnen hier beigelegten Nummern bezeichnen. — 2) Delambre a. a. O. II. 55. — 3) Delambre hält dies für sehr wahrscheinlich (ebenda 52), eine Ansicht, der wir uns nicht anschliefsen können.

setzen, dann ist $\alpha + \beta = 90^0 = \sigma$ gegeben, und da auch das Verhältnis der Chorden dieser Winkel bekannt ist, so findet man unmittelbar die Bögen a und $90^0 - a$. Übrigens umgeht Ptolemäus die Schwierigkeit gewöhnlich, indem er zuerst mit den Formeln III und IV andere Stücke des Dreiecks berechnet und dann erst auf die gesuchten schliefst. So z. B. sucht er, um aus c und A, b zu finden, welches die Formel IV direkt geben würde, zuerst mit I die Seite a und bestimmt dann aus II mit Hilfe von a und A das gesuchte Stück [1]).

Man überzeugt sich nun leicht, dafs die Griechen imstande waren, mit ihrer Methode alle Fälle, die bei rechtwinkligen sphärischen Dreiecken vorkommen können „bis auf einen", zu lösen, nämlich die Berechnung der Seiten aus den drei Winkeln. Dieser Fall bietet sich aber in der Astronomie nicht dar, und so blieb er denn auch unberücksichtigt, bis sich die Trigonometrie zu einer von der Astronomie unabhängigen selbständigen Wissenschaft gestaltete. Auch die polare Aufgabe, aus den drei Seiten eines Dreiecks die Winkel zu bestimmen, die mit ihrer Methode zu bewältigen ist [2]), wurde von ihnen ignoriert, wenigstens findet sich im Almagest von ihr keine Spur.

Die Berechnung ebener Dreiecke spielt natürlich in der Astronomie eine untergeordnetere Rolle, worin auch der Grund für die frühere Ausbildung der sphärischen Trigonometrie liegt. Dennoch kommt Ptolemäus an verschiedenen Stellen seines Almagest in die Lage, auch zur Berechnung ebener Figuren Mittel anzugeben [3]). Auch hierbei wird direkt nur das rechtwinklige Dreieck in Betracht gezogen, zu dessen Berechnung die beiden Formeln (Fig. 11)

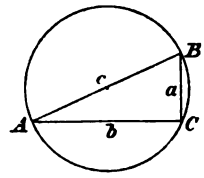


Fig. 11.

$$a = \frac{c \operatorname{crd}(2A)}{120^p}; \quad \operatorname{crd}(2A) = \frac{a \cdot 120^p}{c}$$

in Verbindung mit dem Pythagoräischen Satze ausreichen. Die schiefwinkligen Dreiecke werden durch eine Senkrechte in zwei

---

1) Diesen Weg schlägt Ptolemäus z. B. im 13. Kap. des I. Buches ein, um aus Ekliptikschiefe und Länge der Sonne die Rektaszension zu berechnen, indem er zuerst die Deklination bestimmt. — 2) Delambre a. a. O. II. 61 ff. — 3) So bei Bestimmung der Schattenlänge eines Gnomons lib. II. c. V. Ed. Halma 74. Ed. Heiberg 98 ff.; bei Bestimmung der Anomalie lib. IV. c. V und der Exzentrizität des Mondes lib. V. c. VIII. — S. Günther machte mich darauf aufmerksam, dafs solche Berechnungen ebener Dreiecke auch in der Geographie des Ptolemäus vorkommen. Vgl. hierüber H. Berger, Geschichte der wissenschaftl. Erdkunde der Griechen. 4. Abt. Leipzig 1893. 131—135.

rechtwinklige zerlegt und mit den eben erwähnten Formeln behandelt. Dies führt ihn bei der im Buche der Verfinsterungen[1]) auftretenden Aufgabe, einen Winkel aus den drei Seiten zu bestimmen, zu einem Verfahren, aus dem sich später unser Cosinussatz entwickelte. Er sucht zunächst die Differenz der beiden Basisabschnitte (Fig. 12), die die Höhe macht, und findet $CD - DB = \frac{b^2 - c^2}{a}$, da nun noch

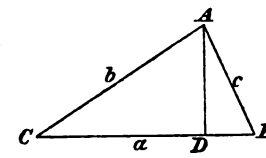


Fig. 12.

$CD + DB = a$ ist, so hat man aus diesen beiden Gleichungen unmittelbar CD und DB; nun folgt weiter $AD = \sqrt{c^2 - DB^2}$ und somit, wie oben

$$\text{crd}\,(2B) = \frac{AD \cdot 120^p}{c} \quad \text{und} \quad \text{crd}\,(2C) = \frac{AD \cdot 120^p}{b}.$$

Damit haben wir alle[2]) Mittel kennen gelernt, deren sich Ptolemäus zur Bestimmung ebener und sphärischer Dreiecke bediente, und die Griechen der späteren Zeit haben nichts Wesentliches mehr hinzugethan. Wir haben nur noch einige Ergänzungen zu erwähnen, welche der schon wiederholt genannte Theon von Alexandrien[3]) in seinem Kommentar zu den Lehren des Almagest hinzufügte. Eine Durchsicht dieses Kommentars läfst erkennen, dafs derselbe viel Überflüssiges enthält und, trotz seiner Breite und Weitschweifigkeit, durchaus nicht immer klar und übersichtlich geschrieben ist. Am erwähnenswertesten ist vielleicht der Umstand, dafs er uns mit

---

1) Lib. VI. c. 7. Ed. Halma 423—424. Ed. Heiberg 516—518 ff. Berechnung der Gröfse des bei einer Sonnenfinsternis vom Monde verdeckten Teiles der Sonnenscheibe. — 2) Es ist nicht richtig, wenn R. Wolf, H. A. I. 225 meint, dafs die Griechen schon den Sinussatz für das schiefwinklige Dreieck kannten. Derselbe findet sich nirgends, weder für die Ebene, noch für die Kugel. — Ungefähr ein Jahrhundert vor Theon hatte Pappus von Alexandrien ebenfalls einen Kommentar zum Almagest geschrieben, da aber Theon denselben benützte — ein Bruchstück von ihm enthält der Anfang der Erläuterungen zum V. Buche — so dürfte sein Inhalt jedenfalls den uns bekannten des Theon'schen Werkes kaum übertroffen haben. — 3) Theon lebte in Alexandria zur Regierungszeit Theodosius' des Grofsen und wird gewöhnlich zum Unterschiede von dem zu Smyrna lebenden Zeitgenossen des Ptolemäus, Theon Smyrnaeus, der Jüngere genannt. Nach seiner eigenen Angabe beobachtete er in Alexandria, wo er am Museum lehrte, im Jahre 365 nach Chr. eine Sonnenfinsternis, und seine Bemerkungen zu den chronologischen Handtafeln des Ptolemäus erstrecken sich bis 372, vielleicht sein Todesjahr. Von seinem Kommentar zum Almagest fehlen die Kommentare zum III., zu einem Teile des V., zum XI. und XII. Buche; ein günstiger Zufall ist es für uns, dafs jener zum ersten Buche erhalten blieb.

der Sexagesimalrechnung der Griechen bekannt macht und dafs er bei Wiederholung der Rechnungen des Ptolemäus eine gröfsere Genauigkeit anstrebt und wenigstens einigermafsen die Genauigkeitsgrenzen der im Almagest entwickelten Methoden untersucht[1]). Aufserdem müssen wir noch ein nicht unwichtiges Theorem mitteilen, das er im 2. Buche seines Kommentars beweist[2]). Es ist dies der Satz, dafs die Zuwächse der Sehnen bei konstant wachsenden Bögen abnehmen. Die konstanten Inkremente des Bogens AB (Fig. 13) seien die Bögen $BC = CD = DE$, dann ist zu beweisen, dafs der Zuwachs der Sehne BB' gröfser ist, als der Zuwachs, den die Sehne CC' erleidet, also $CL > DK$. Nun haben die Dreiecke BCF und CFD die Seite CF gemeinsam, $BC = CD$ und $\sphericalangle BCF > FCD$, also ist $BF > FD$, also auch $FG > DK$, oder $CL > DK$. Heute erkennt man die Richtigkeit des Satzes, indem man $y = \sin x$ setzt und $dy = \cos x dx$ bildet; da nun dx konstant ist, so nimmt dy mit wachsendem x gegen Null ab. Diesem Hilfssatze werden wir später noch bei den Arabern begegnen, die ihn nützlich zu verwerten verstanden.

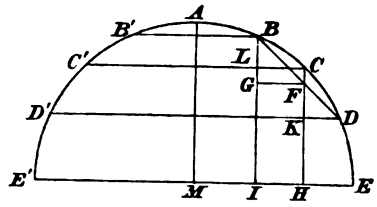


Fig. 13.

Da Theon, wie aus dem Angeführten erhellt, durchgreifende Verbesserungen der trigonometrischen Methoden nicht einzuführen imstande war, so sehen wir, dafs in dem Zeitraum zwischen der Mitte des zweiten und dem Ende des vierten Jahrhunderts ein völliger Stillstand in der Fortbildung der geometrischen Rechnungsmethoden eingetreten sein mufste, eine Erscheinung, die in ähnlicher Weise auch in den anderen Gebieten der Mathematik, wie in der Astronomie, zu beobachten ist. Theons Kommentar ist das letzte uns erhaltene Werk, das aus der Schule der Neuplatoniker hervorging, denn wenn uns auch Suidas überliefert hat, dafs die gelehrte Tochter Theons, die unglückliche Hypatia, welche im Jahre 415 von einem christlichen Pöbelhaufen ermordet wurde, unter anderen mathematischen Schriften einen astronomischen Kanon oder Kommentar ver-

---

1) So findet er z. B., Commentaire Ed. Halma 203, dafs $1^p\,2'\,50'' < \text{crd}\,1^\circ < 1^p\,2'\,50''\,12'''$ ist, wie wir dies schon S. 21 bemerkten, und sagt die $12'''$ können weggelassen werden, da sie $< \frac{1}{2}''$ sind; auch weist er (213—214) darauf hin, dafs Ptolemäus' Methode zur Umgehung der Dreiteilung bei Bögen von gröfserem Intervalle nicht zu verwenden ist. — 2) Auf das hat schon Delambre a. a. O. II. 570—571 aufmerksam gemacht.

faſst habe, so ist doch leider von ihren Werken nichts mehr auf uns gekommen.

Jahrhunderte lang war Alexandria das Zentrum der Bildung, die Pflanzstätte der Wissenschaften gewesen. Aus der Vereinigung ägyptischer und asiatischer Kenntnisse hatte der überlegene hellenische Geist neue wissenschaftliche Systeme zu schaffen verstanden, und namentlich Mathematik und Astronomie waren zu hoher Blüte gediehen. Selbst als Cäsar im Jahre 47 seine Legionen gegen die Stadt am Nildelta ins Feld führte, und bei ihrer Eroberung das Brucheion mit seinen Bücherschätzen ein Raub der Flammen wurde, fand man bald wieder wenigstens einen teilweisen Ersatz an der grofsartigen Bibliothek, welche Attalus III., König von Pergamum, einst bei seinem Tode im Jahre 133 v. Chr. dem römischen Senate vermacht hatte, indem der Triumvir Antonius dieselbe im Serapistempel zu Alexandria aufstellen liefs. Bald hatte sich die neue Akademie gebildet, die Schule der Neupythagoräer entstand und wurde im dritten Jahrhundert nach Chr. von jener der Neuplatoniker abgelöst, die Ammonius ins Leben rief. Ob Ptolemäus dieser Schule angehörte, wissen wir nicht, wohl aber seine Kommentatoren Pappus und Theon und des letzteren Tochter Hypatia. Mit ihrem Tode verschwindet Alexandria aus der Geschichte der Entwickelung mathematischer und astronomischer Wissenschaften, und wenn auch an der neugegründeten Hochschule in Athen der Neuplatonismus noch eine Zeit lang sein Leben fristete, so ging doch aus seinem Schofse keine Persönlichkeit mehr hervor, welche unser spezielles Interesse in Anspruch nimmt. Ebensowenig Bemerkenswertes wurde in unserer Wissenschaft an der von Theodosius II. im Jahre 425 in Konstantinopel gegründeten Universität geleistet, und auch der Aufschwung der mathematischen Wissenschaften[1]), welcher unter Leon, dem Mathematiker, zur Zeit des Kaisers Theophilus (829—842) in Byzanz stattfand, bewirkte nur eine Wiederaufnahme lange vernachlässigter Studien, ohne in unserem Fache Neues zu bieten. Erst unter der Herrschaft der Paläologen (1258) begann in Byzanz eine fruchtbare Thätigkeit in mathematischer und astronomischer Hinsicht sich zu entwickeln. Da jedoch der Anstofs hierzu von der inzwischen aufgeblühten arabisch-griechischen Litteratur ausging, und die Griechen die Schriften ihrer Vorfahren erst wieder aus orientalischen Quellen kennen lernten, so müssen wir eine Besprechung der wissenschaft-

1) Vgl. K. Krumbacher, Geschichte der byzantinischen Litteratur von Justinian bis zum Ende des oströmischen Reiches (827—1453). 2. Aufl. München 1897. 620 ff.

lichen Thätigkeit dieser Periode auf später verschieben. Dagegen haben wir noch einige Worte bezüglich des Überganges der mathematisch-astronomischen Wissenschaften der Griechen an die übrigen Kulturvölker beizufügen.

Man sollte erwarten, dafs, nachdem Alexandria in die Hand der Römer gekommen und eine Provinzialstadt des grofsen weltumspannenden Reiches geworden war, mit der Verschiebung der politischen Macht auch der Schwerpunkt der geistigen und wissenschaftlichen Entwickelung nach Rom verlegt worden wäre. Das war aber keineswegs der Fall; denn wenn es auch einzelne Astronomen, wie Menelaus gab, die zeitweise in Rom lebten, wenn auch Philosophenschulen, wie die des Plotinus (224 n. Chr.) daselbst entstanden, so fristeten doch die Wissenschaften, die nur idealen Zwecken dienten, daselbst ein kümmerliches Dasein. Der Geist[1]) der Römer war zu sehr auf das rein Praktische gerichtet, als dafs z. B. die Astronomie daselbst jemals zu besonderer Blüte hätte gelangen können. Was die Römer allein interessierte, war die für ihre Grenzregulierungen unentbehrliche Feldmefskunst[2]). Aber auch hierin haben sie bei den Griechen Anlehen gemacht, indem sie sich der Methoden des uns schon bekannten Heron, des Geodäten, bedienten — eine selbständige Weiterentwicklung, etwa nach trigonometrischer Seite hin, war von ihnen weder zu erwarten, noch trat sie auch wirklich ein, so dafs es für unsere Zwecke völlig belanglos ist, ihre Thätigkeit weiter zu verfolgen.

Anders war es bei einem Volke, das schon frühzeitig in Berührung mit hellenischer Bildung und hellenischer Wissenschaft trat und teils vermöge einer unverkennbaren Naturanlage, teils infolge seines religiösen Kultus sich zu mathematischen und astronomischen Studien hingezogen fühlte: wir meinen die Inder, deren Anteil an der Entwickelung unserer Wissenschaft wir im folgenden Kapitel schildern wollen.

---

1) Cicero sagt hierüber (Tuscul. Quaest. lib. I. c. 2. § 5: „Die Geometrie stand bei den Griechen in höchsten Ehren, weshalb nichts glänzender ist, als ihre Mathematiker, bei den Römern aber ist das Mafs jener Kunst durch den Nutzen des Rechnens und Ausmessens begrenzt." — 2) Vgl. hierüber M. Cantor: Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmefskunst. Leipzig 1875. 8°., und Geschichte II. 496—521.

3. Kapitel.

Die indische Trigonometrie.

§ 1. Berechnung der Sinustafeln.

Die mathematisch-astronomischen Kenntnisse der Inder hatten ebenso wenig, oder noch weniger, als die der Griechen auf heimischem Boden ihre erste Entstehung gefunden. Schon in den ältesten Zeiten stand Indien mit den umliegenden Völkerschaften in regen Handelsbeziehungen, und es darf daher kein Wunder nehmen, wenn sich Spuren chaldäischer Wissenschaft in ihrer eigenen finden[1]). Die Eroberungszüge Alexanders des Grofsen (327) aber hatten einen engen Kontakt mit hellenischer Kultur und Bildung eröffnet, der unter den Seleuciden sich noch inniger gestaltete, als der Begründer dieser Dynastie, Seleukus Nikanor (312—280), durch Verträge mit dem König der Inder die Grenzen seiner Herrschaft feststellte. Und als sich orientalische Teile seines Reiches losgetrennt hatten, welche zu unabhängigen Satrapien wurden, hielten die griechischen Fürsten, die selbst wieder in beständigen Beziehungen zu ihrem Mutterlande standen, das freundschaftliche Verhältnis mit Indien aufrecht. So kam es, dafs schon damals griechische Wissenschaft nach Indien verpflanzt wurde[2]). Aber auch noch in späterer Zeit fand dieser Übergang statt, und die astronomische Litteratur der Hindu scheint uns sowohl die ältere, als auch die neuere Periode der griechischen deutlich erkennen zu lassen[3]). Jedoch steht es andererseits aufser Zweifel, dafs die Inder, die mit ebenso grofsem rechnerischen Talente begabt sind, wie die Griechen mit geometrischen Anlagen ausgestattet waren, die überkommenen Methoden nach der rechnerischen Seite hin ausbildeten und dabei manches Originelle hinzuthaten. So läfst sich z. B. ihre Berechnung der Sinustabellen bei keinem andern der

---

1) J. B. Biot, Études sur l'Astronomie Indienne et sur l'astronomie Chinoise. Paris 1862. 8°. 81. — 2) Vgl. hierüber: Reinaud, Mémoire sur l'Inde. Paris 1849. 242 ff. — Weber, Zur Geschichte der indischen Astrologie. Indische Studien. Bd. II. 1853. 236 ff. und 242 ff. — Sûrya-Siddhânta. Ed. Burgess. Journal of the American oriental Society vol. II. 470—475. — Whitney, Oriental and linguistic studys 1874. 365 ff. — M. Cantor, Graeco-indische Studien. Zeitschrift f. Math. und Phys. 1877. XXII. histor. Abteil. 1—5, sowie Gesch. der Math. I. 2. Aufl. 559—561. — 3) Der Wortlaut ihrer in Versen gegebenen Regeln zeigt nämlich deutlich, dafs dieselben ausschliefslich mit Benützung der Projektionsmethode, also der älteren Methode der Griechen, und nicht mit dem Satze des Menelaus abgeleitet sind, während ihr Planetensystem völlig mit dem künstlichen Epizykelsystem des Ptolemäus übereinstimmt, also einer weit späteren Zeit angehört.

bekannten Kulturvölker nachweisen, und gerade der Kern jener uns aus dem Analemma bekannten Methode, die Orthogonalprojektion, die, soviel uns bekannt, die Griechen nur zur graphischen Bestimmung der Sonnenörter führte, veranlafste sie zur erstmaligen Einführung des Sinus statt der Sehne und wurde in ihrer Hand zu einer fruchtbaren astronomischen Rechnungsmethode.

Von der uns interessierenden Litteratur der Inder ist uns allerdings noch nicht allzuviel bekannt geworden, doch genügt das Wenige, um einen Einblick in ihre Trigonometrie zu gewinnen, die wie bei den Griechen, nur zum Zwecke astronomischer Berechnungen verwendet wurde. Wir müssen daher ihre astronomischen Siddhântas', ihre Systeme, zu Rate ziehen, deren sie eine ganze Reihe besafsen und noch besitzen[1]).

Das älteste dieser Werke, soweit sie noch erhältlich sind, ist der Sûrya-Siddhânta, oder die „sichere Wahrheit enthüllt durch die Sonne"; doch auch seine Entstehung fällt wahrscheinlich erst in das vierte Jahrhundert nach Chr.[2]), woraus jedoch keineswegs gefolgert werden darf, dafs die darin überlieferte Wissenschaft nicht viel früher schon im Besitze der Inder war, denn auch die spätere Siddhânta-Litteratur weist gegen dieses älteste Werk soviel wie keinen Fortschritt auf[3]), und auch das jüngste der Systeme, der

---

1) Bezüglich der bis jetzt in moderne Sprachen übersetzten Siddhânta-Litteratur sei bemerkt, dafs zuerst Davis in den Asiatic researches of the Society of Bengal vol. II. 1807 die 1789 entstandene engl. Übersetzung eines Auszuges aus dem Sûrya-Siddhânta veröffentlichte; 1861 erschien dann in der Bibliotheca Indica, Serie 30, Calcutta, ein gröfserer Teil desselben von dem Inder Pundit Bâpû Dewa Sâstri 1860 ins Englische übersetzt, zugleich mit einer Version der astronomischen Teile des Siddhânta-Çiromaṇi von L. Wilkinson, und 1860 veröffentlichte E. Burgess eine mit wertvollen Anmerkungen versehene Übersetzung des ganzen Sûrya-Siddhânta im Journal of the American oriental Society VI. New-Haven, welche jedoch Whitney p. 366 Anm. 1 seiner Oriental and linguistic studys 2. Serie. 1874 vollständig als sein Werk in Anspruch nimmt und bemerkt, dafs nur bei der Abfassung der Anmerkungen mathem. Inhaltes sich Professor Newton beteiligt habe. Aufser diesen Ausgaben lag uns noch G. Thibauts engl. Version des Pañchasiddhânticâ von Varâha-Mihira (Ende des 5. Jahrhunderts), Benares 1889 vor. — Brahmagupta (geb. 598) schrieb Brâhma-sphuta-Siddhânta, oder das verbesserte System, in welchem das 12. und 18. Kapitel rein mathematischen Inhaltes sind. Diese beiden Kapitel sind im Verein mit den algebraischen Abschnitten im Siddhânta-Çiromâṇi von H. Th. Colebrooke unter dem Titel Algebra with arithmetic and mesuration from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhaskara translated by H. Th. Colebrooke, London 1817 veröffentlicht. Brahmagupta ist geboren 598 nach Chr. und Bhâskara Âkârya, der Verfasser des Siddhânta-Çiromâṇi 1114. — 2) Whitney, Or. and ling. st. 201. — 3) Dies bestätigen alle Kenner der indischen Litteratur (z. B. Biot a. a. O. 20)

Siddhânta-Çiromâṇi, der von Bhâskara-Âkârya aus dem 12. Jahrhundert stammt, ist hiervon nicht ausgeschlossen. Wir können uns daher mit der Darstellung der trigonometrischen Methoden begnügen, wie sie sich aus dem Sûrya-Siddhânta ergeben.

Nun sind alle astronomischen Lehrbücher der Inder und also auch dieses in Versen geschrieben, die nur die nackten Rechnungsregeln ohne Begründung oder Beweis angeben, und man ist daher gezwungen aus dem Wortlaute derselben auf ihre Entstehung zurückzuschliefsen. Anhaltspunkte hierzu bietet die Kenntnis ihrer Rechnungsmethoden, welche uns durch Colebrooke vermittelt wurden[1]) und erkennen lassen, dafs ihnen die Lehre von den Proportionen völlig geläufig war. Ihre geometrischen Resultate haben sie daher nur mit Hilfe ähnlicher Dreiecke, auf die sie die Regel der drei Gröfsen anwenden konnten, erzielt. Sollte aber dieses einfache Hilfsmittel genügen, um sphärische Probleme zu lösen, so war es am nächsten liegend, die Kugel auf drei zu einander senkrechte Ebenen zu projizieren, eine Methode, die sie in der Gnomonik der Griechen schon fertig vorfanden. Thatsächlich läfst sich auch jede der indischen Regeln, ohne irgend welchen Zwang, aus den Elementen der durch diese Projektionen erhaltenen Figuren zusammensetzen.

Doch beginnen wir zunächst mit dem, was wir über die Sinustafeln der Inder und ihre Herstellung mitteilen können. Da finden wir nun zunächst in dem noch nicht genannten Werke Âryabhaṭîyam des 476 nach Chr. geborenen Âryabhaṭa im dritten Abschnitte[2]) folgende Entstehung des Sinus angegeben: „Teile den vierten Teil des Kreises mittelst eines Dreieckes und eines Viereckes (in gleiche Teile), so hast du auf dem Radius alle gewünschten Halbsehnen (djyâ-ardhâ, oder ardhâ-djyâ, oder kurz mit Weglassung von ardhâ = halb, djyâ) der Bögen (câpa).“

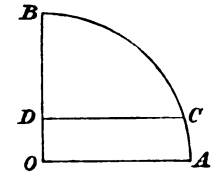


Fig. 14.

D. h. doch, man teile den Quadranten in eine Anzahl gleicher Teile; ist dann AC ein solcher Teil (Fig. 14) und fällt man $CD \perp OB$, so entsteht die dreieckige Figur CDB und die viereckige $ACDO$, OD ist die Halbsehne des doppelten Bogens AC oder unser Sinus, und alle diese Sinusse werden auf dem Radius OB abgelesen.

---

und wir haben uns, soweit es die eben angeführte Litteratur erlaubte, von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt.

1) Colebrooke a. a. O. Lîlavâtî. Cap. III. sect. VI; ferner Arneth, Geschichte der Mathematik p. 174. — 2) Ein Teil dieses Abschnittes ist von Rodet ins Französische übersetzt: Journal asiatique 7. Serie XIII. 1879.

Diese und die entsprechende Stelle im Sûrya-Siddhânta[1]) sind die ältesten der uns bekannten Litteratur, in denen der Sinus auftritt, und den Indern kommt das Verdienst zu, denselben zuerst eingeführt zu haben.

Nun teilen die Inder, wie die Griechen, babylonischer Überlieferung folgend, den Kreis in $360^0 = 21600'$ und setzen den Sinus des 96. Teiles desselben, oder des 24. Teiles des Quadranten, wie Âryabhâṭa sagt[2]), d. h. $\sin 3^0\,45' = \sin 225'$, den kramadjyâ, d. h. geraden Sinus, gleich 225′, ein von der Gepflogenheit der Griechen völlig verschiedenes Verfahren. Hierauf wird sowohl im Âryabhâṭyam, als im Sûrya-Siddhânta beistehende Sinustafel mitgeteilt, die aufser den Sinussen auch noch die Werte des Sinus versus, utkramadjyâ genannt, enthält[3]).

No.	Bögen		Indische Sinus				Wahre Werte in Min.	Sinus versus	Sinus in 120 Teilen des Rad.
	in Gr. u. Min.	in Min.	in Min.	1. Diff.	2. Diff.	in Teilen des Rad.			
1	3° 45′	225′	225′			0,065445	224,84′	7′	7′ 51″
				224					
2	7° 30′	450	449		— 2	0,130599	448,72	29	15′ 40″
				222					
3	11° 15′	675	671		— 3	0,195172	670,67	66	23′ 25″
				219					
4	15°	900	890		— 4	0,258871	889,76	117	31′ 4″
				215					
5	18° 45′	1125	1105		— 5	0,321408	1105,03	182	38′ 34″
				210					
6	22° 30′	1350	1315		— 5	0,382489	1315,57	261	45′ 56″
				205					
7	26° 15′	1575	1520		— 6	0,442117	1520,48	354	53′ 5″
				199					
8	30°	1800	1719		— 8	0,500000	1718,88	460	60′
				191					
9	33° 45′	2025	1910		— 8	0,555555	1909,91	579	66′ 40″
				183					
10	37° 30′	2250	2093		— 9	0,608784	2092,77	710	73′ 3″
				174					
11	41° 15′	2475	2267		— 10	0,659395	2266,67	853	79′ 7″
				164					
12	45°	2700	2431		— 10	0,707097	2430,86	1007	84′ 51″
				154					
13	48° 45′	2925	2585		— 11	0,751894	2584,64	1171	90′ 13″
				143					
14	52° 30′	3150	2728		— 12	0,793484	2727,35	1345	95′ 13″
				131					
15	56° 15′	3375	2859		— 12	0,831588	2858,38	1528	99′ 46″
				119					
16	60°	3600	2978		— 13	0,866201	2977,18	1719	103′ 56″
				106					
17	63° 45′	3825	3084		— 13	0,897033	3083,22	1918	107′ 38″
				93					
18	67° 30′	4050	3177		— 14	0,924084	3176,07	2123	110′ 53″
				79					
19	71° 15′	4275	3256		— 14	0,947062	3255,31	2333	113′ 38″
				65					
20	75°	4500	3321		— 14	0,965969	3320,61	2548	115′ 56″
				51					
21	78° 45′	4725	3372		— 14	0,980803	3371,70	2767	117′ 43″
				37					
22	82° 30′	4950	3409		— 15	0,991565	3408,34	2989	119′
				22					
23	86° 15′	5175	3431		— 15	0,997964	3430,39	3213	119′ 45″
				7					
24	90°	5400	3438			1,000000	3437,75	3438	120′ 1″

1) Asiatic researches II. 245 und Ed. Burgess 196. Cap. II. No. 15. — 2) Cap. I. Strophe X. Möglich ist, dafs die Sinustafel der Inder ihren Ursprung bei den Babyloniern hat, da sie auf der Sexagesimalteilung derselben beruht; vgl. auch Rodet a. a. O. 414 und Whish, Transactions of the Litt. Soc. of Madras I. 70. — 3) Die vier ersten Spalten und die 9. dieser Tafel sind dem Sûrya-Sid-

Die Bildung der Zahlenwerte dieser Tafel wird im Sûrya-Siddhânta mit so klaren Worten angegeben[1]), dafs sie sich unmittelbar durch die Formel

$$\sin((n+1)\alpha) = \sin(n\alpha) + \left\{\Delta_{n+1} - \frac{\sin(n\alpha)}{\sin\alpha}\right\}$$

ausdrücken läfst, wo

$$\alpha = 225' = \sin\alpha \quad \text{und} \quad \Delta_{n+1} = \sin(n\alpha) - \sin(n-1)\alpha$$

ist und in der 5. Spalte der Tabelle berechnet steht. Schwieriger zu beantworten ist die Frage, wie die Inder zu dieser mechanischen Interpolationsformel kamen, welche, wie die in Spalte 8 angegebenen exakteren Sinuswerte zeigen, zu hinlänglich genauen Resultaten führte. Wir kommen zur Beantwortung dieser Frage durch eine Notiz, welche Davis einem Kommentar des Sûrya-Siddhânta entnommen hat[2]); aus derselben ergibt sich nämlich, dafs die Inder die Regel, welche wir in Gestalt obiger Formel schrieben, erst nach der Konstruktion der Tabelle aus den Zahlen derselben herausgelesen haben, was bei ihrer zahlentheoretischen Veranlagung durchaus kein Wunder nimmt. In der That war es auch aus der Bildung der ersten und zweiten Differenzen, die doch sehr nahe lag[3]), unschwer zu ersehen, dafs die zweiten Differenzen, Δ^2, mit den Sinussen wachsen und zwar in der Weise, dafs das Verhältnis des Sinus zur entsprechenden zweiten Differenz eine Konstante c ist, die nahezu mit $\sin\alpha = 225'$ übereinstimmt, so dafs man hat: $\Delta^2_n = \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}$. Ferner zeigt die Tafel direkt, dafs $\sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha = \Delta_{n+1} - \Delta^2_n$ ist, aus welchen beiden Beziehungen sich die fragliche Regel ergibt. Die

---

dhânta entnommen. Ed. Burgess 197, die wahren Sinuswerte sind von dem Herausgeber berechnet, während sich die in der 5. Spalte befindlichen ersten Differenzen im Âryabhâtyam finden, und die zweiten von uns berechnet sind. Die letzte Spalte endlich enthält die Sinusse in 120 Teilen des Durchmessers ausgedrückt, wie sie sich im Pañchasiddhântika des Varâha-Mihira a. a. O. (24) finden. Diese Zahlenwerte gehen also in jene der 4. Spalte durch Multipl. mit $\frac{3438}{120}$ über. Eine solche Einführung des Radius von 120° läfst unzweifelhaft auf griechischen Einfluſs schlieſsen, und Varâha-Mihira spricht thatsächlich an verschiedenen Stellen von einem solchen.

1) Asiatic researches II. 245, wo übrigens die Regel zur Berechnung des sinus versus falsch angegeben ist, während die berechneten Zahlen richtig sind. Dies hat schon Delambre bemerkt a. a. O. I. 457 und es auf einen Fehler des Abschreibers zurückgeführt; in der Ausgabe von Burgess, dem offenbar ein anderes Original vorlag, ist dieser Fehler auch vermieden a. a. O. 196. Vers 22. — 2) Asiatic researches II. 246—247. — 3) Der Kommentar von Raganâtha gibt auch an, dafs diese Regel von den zweiten Differenzen abhänge. Journal of american oriental society VI. 200.

Inder stellten sich dieselbe jedenfalls her, um die Tafel jederzeit leicht aus dem Gedächtnis berechnen zu können. Die Konstante c wurde wohl nur empirisch bestimmt. Genauer ergibt sich dieselbe durch eine einfache Rechnung, die Wöpcke[1]) angestellt hat, zu 227′ 48,5″.

Wie erhielten nun aber die Inder die Zahlen ihrer Tabelle ursprünglich? Im Âryabhaṭîyam findet sich für π der Wert 3,1416[2]). Nun sucht der Inder die Größe des Kreisbogens in Minuten, der seiner Länge nach dem Radius gleichkommt — ein Gedanke, auf den ein Grieche nie gekommen wäre, da es ihm absolut ferne lag, eine Gerade durch einen Kreisbogen zu messen — und findet aus der Proportion $r' : r = 180 \cdot 60 : r\pi$, $r' = 3437{,}73\ldots'$, oder in ganzen Zahlen, die, wie schon die Tafel gezeigt hat, allein berücksichtigt werden, $r = 3438'$. Aus der Definition des Sinus ergab sich dann $\sin 90^0 = 3438'$ und aus dem regulären Sechsecke $\sin 30^0 = \frac{r}{2} = 1719'$ und $\sin 60^0 = \sqrt{\frac{3r^2}{4}} = 2978'$. Ferner ließs sich ebenfalls leicht geometrisch schließen, daß $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \sqrt{\frac{r^2}{2}}$ ist, und dieser Wert vom Radius abgezogen lieferte sinvers 45^0. Mit diesem multiplizierte man den Radius, und die Quadratwurzel aus dem halben Produkt gab $\sin 22^0\,30'$. Hierauf wurde das Quadrat dieses Wertes von dem Radius abgezogen, und die Wurzel aus der Differenz ergab $\sin 67^0\,30' = \cos 22^0\,30'$. Hieraus folgt weiter $r - \cos 67^0\,30' = \text{sinvers}\,67^0\,30'$ und $r - \cos 22^0\,30' = \text{sinvers}\,22^0\,30'$ u. s. f. Aus dieser Darstellung, die dem Sûrya-Siddhânta entnommen ist[3]), erkennt man die Vertrautheit der Inder mit den Beziehungen, die wir durch die Formeln $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sin^2\alpha + \text{sinvers}^2\alpha = \left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$, oder $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$[4]) für $r = 1$ ausdrücken und denen wir schon bei den Griechen begegneten. Thatsächlich genügen, wie man sich leicht überzeugt, diese Formeln, um die sämtlichen 24 Sinus- und Sinus versus-Werte zu erhalten. Die Sinusse zwischenliegender Winkel konnten dann leicht mittelst der ersten Differenzen interpoliert werden.

---

1) Nouvelles Annales 1854. XIII; vgl. auch Playfour, Transactions of the roy. Soc. of Edinbourgh 1798. IV. part. II. 83 ff. — 2) Die Inder besitzen übrigens auch den Archimedischen Wert $\frac{22}{7}$ und den Wert $\sqrt{10}$. Vgl. A. Marre, Nouvelles Annales 1846. 571 und Cantor I. 604 und 606. — 3) Asiatic researches II. 247. — 4) Die beiden hier angegebenen Formeln finden sich, natürlich in Worten, in Varâha-Mihiras Pañchasiddhântikâ. Ed. Thibaut. Cap. IV. Vers 3 u. 4. p. (24).

Man hat die Frage aufgeworfen, warum die Inder gerade von $3^0\,45'$ zu $3^0\,45'$ ihre Tafel berechneten. Wöpcke[1]) sieht mit Recht den Grund hierfür darin, dafs sie nur imstande waren, die Zweiteilung der Sinusse vorzunehmen, und von $\sin 90^0 = 3438'$ ausgehend schliefslich zu $\sin 225' = 225'$ gelangen mufsten, wenn sie sich, wie dies dem Charakter ihrer Methode entspricht, nur auf Minuten beschränkten. Weiter konnte die Operation dann nicht mehr getrieben werden, denn da die Sinusse mit abnehmenden Winkeln abnehmen, so müssen die Sinusse von Winkeln, die kleiner als $225'$ sind, umsomehr den Bögen gleich werden.

Aufser der geschilderten Methode zur Berechnung der Sinustafeln, welche in den ältesten indischen Werken niedergelegt ist, teilt Bhâskara in seinem Siddhânta-Çiromâṇi, dem verbesserten System, noch eine andere mit, welche dazu dient, eine Sinustafel von Grad zu Grad herzustellen. Zunächst giebt er an, dafs $\sin 1^0 = 60'$ sei (in Teilen des Radius $3438'$), ohne jedoch zu verraten, wie er zu diesem Werte gelangt[2]). Um dann hiermit die Sinusse der übrigen Winkel zu bestimmen, gibt er[3]) die Additionsformel in der Form an: $\sin(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{r} \pm \frac{\cos\alpha\sin\beta}{r}$ und aus ihr gewinnt er die Gleichung $\sin(\alpha \pm 1^0) = \left(\sin\alpha - \frac{\sin\alpha}{6569}\right) \pm \frac{10\cos\alpha}{573}$, mit der er seine Rechnung vollendet. Die letztere Formel ergibt sich, wenn man $\frac{\sin 1^0}{r} = \frac{60}{3438} = \frac{10}{573}$ setzt, wodurch

$$\frac{\cos 1^0}{r} = 1 - \frac{1}{6569} = \frac{6568}{6569} = 0{,}999846247\ldots$$

kommt, ein Wert, der auf 5 Dezimalen mit dem richtigen stimmt.

---

1) Nouvelles Annales 1854. XIII. 390. — 2) Siddhânta-Ciromâṇi. Ed. Wilkinson 263—268. Bhâskara sagt hier nur, die Regel, mit der man diese Werte erhalte, heifse Pratihâgajyakâ (268. Vers 23) und sei in seiner Lîlavâtî gegeben, aber für eine genaue Berechnung sei sie nicht ausreichend, weshalb er davon abstehe, dieselbe mitzuteilen. Schon Cantor hat (I. 618) darauf aufmerksam gemacht, dafs die hiermit gemeinte Formel

$$s = \frac{4d \cdot B(P-B)}{\frac{1}{4}P^2 - B(P-B)}$$

heifse (Lîlavâtî bei Colebrooke a. a. O. 94. § 213), wo s die gesuchte Sehne, d der Durchmesser, B der Bogen, P die Kreisperipherie bedeuten. Berechnet man mit dieser Formel, deren Entstehung ganz rätselhaft ist, $\frac{s}{2} = \sin 1^0$, so kommt für $B = 2$, $P = 360^0$, $d = 2 \cdot 3438$, 61,05 statt 60, wie Bhâskara genauer annimmt. — 3) Vers 21—22. „This excellent rule called Jya-Bhárará has been prescribed for ascertaining the other sines."

§ 2. Methode der indischen Trigonometrie.

Wir bemerkten schon, dafs die indische Trigonometrie, die nur zu astronomischen Zwecken diente, aus jener Projektionsmethode hervorging, welche die Griechen zu ihrer graphischen Lösung spärischer Dreiecke verwendeten. Aber in der Hand der rechengewandten Inder ging dieses Verfahren sofort in ein rechnerisches über, das die schwerfällige Sehnenmethode der Griechen durch Einführung des bei diesen Konstruktionen unmittelbar und stets sich darbietenden Sinus wohl zu ersetzen vermochte. Gerade der Gebrauch dieser Projektionsmethode mufste sie bei Einführung der Zahlenrechnung sofort auf die Vorteile hinweisen, welche die Benützung der halben vor der ganzen Sehne bietet[1]). Wir wollen diese Auseinandersetzungen durch zwei Beispiele erläutern, die wir dem Sûrya-Siddhânta entnehmen. Es heifst daselbst Vers 61 und 62[2]): „Multipliziere den Sinus der Deklination (der Sonne) mit dem Äquinoktialschatten und dividiere durch 12 (die Länge des Gnomons); das Resultat ist der Erdsinus (kshitijyâ). Dieser multipliziert mit dem Radius (der Himmelskugel) und dividiert durch den Radius des Tagkreises gibt den Sinus der Aszensionaldifferenz (cara). Die Anzahl der Athemzüge, welche die Aszensionaldifferenz ausmachen, ist gegeben durch den entsprechenden Bogen. Füge diesen hinzu und ziehe ihn ab von dem vierten Teile des entsprechenden Tages und der Nacht, und der Rest ist der halbe Tag und die halbe Nacht, wenn die Deklination nördlich ist . . ." Zum Verständnis dieser Strophen ist folgendes vorauszuschicken: die Polhöhe des Beobachtungsortes wird dadurch gemessen, dafs man zur Zeit der Äquinoktien die Länge des Schattens bestimmt, den ein vertikales Gnomon von 12 Fingern wirft; ferner wird die Zeit durch Athemzüge gemessen, und zwar ist ein Athemzug (prâna) = 4″ unserer Zeitbestimmung, 6 prânas = 1 vinâḍî = 24″, 60 vinâḍîs = 1 nâḍî = 24′, 60 nâḍîs = 1 Tag; ein Athemzug ist also äquivalent 1′ Bogenmafs[3]). Die angeführten Regeln leiten sich nun naturgemäfs folgendermafsen ab[4]). Es sei (Fig. 15) $ZNZ'S$ der Meridian, Z Zenit, Z' Nadir, SON der Horizont, also SN die Mittags- und OC die Ost-Westlinie, ZOZ' der erste Vertikal, PP' die Weltaxe, also arc. $NP = \varphi$ = der Polhöhe, EE' der Schnitt der Äquator-

---

1) Vgl. hierzu die Ansicht Cantors I. 618, der glaubt, die Inder hätten den Sinus „wie durch einen Zufall" gefunden. — 2) Ed. Burgess. Cap. II. 233. Diesen Versen entsprechen mit unbedeutenden Abweichungen die Verse 26–28 im Pañchasiddhântikâ (27), (28) der Übersetzung. — 3) Surya-Siddhânta. Ed. Burgess 149. — 4) Ebenda 232—234.

ebene EOE' mit der des Meridians, und die Sonne befinde sich in Σ, so ist, wenn $D\Sigma D''$ den Parallelkreis zu EOE' durch Σ darstellt, der den Horizont in A trifft, arc. $D\Sigma A$ der halbe Tagbogen der Sonne, und $\sphericalangle DPA = \sphericalangle ECG = t_0$ sein Maſs. Legt man ferner die Vertikalebene $Z\Sigma C$, die den Horizont in CC' schneidet, projiziert Σ senkrecht auf denselben nach R und konstruiert die Projektionen Σ' und R' von Σ und R auf die Meridianebene, zieht $\Sigma' R'$ und sucht ebenso die Projektion A' von A, zieht den Kreis PAP', der den Äquator in G trifft, und projiziert noch G senkrecht nach G', E nach H und D nach F, zieht BA, CG und DC, so

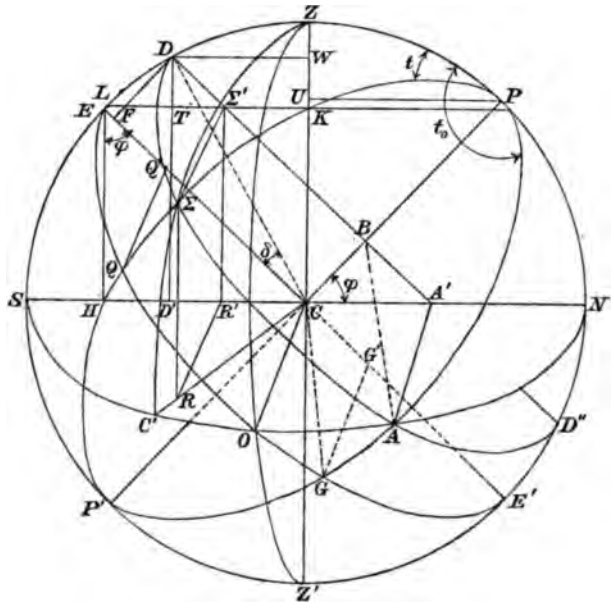


Fig. 15.

folgt: arc. $DE = \sphericalangle ECD = \delta =$ Deklination der Sonne, also $\sin \delta = DF = BC$, da die Sinusse auch für den Radius r der Kugel stets durch Linien ausgedrückt werden. Ferner ist HC proportional dem Äquinoktialschatten, HE proportional 12 Fingern, d. h. der Länge des Gnomons. Aus $\triangle A'BC \sim \triangle CEH$ folgt dann

$$A'B = \frac{BC \cdot HC}{EH} = \frac{\sin \delta \cdot \text{Äquinoktialschatten}}{12},$$

also ist die Strecke $A'B$ der Erdsinus (nach Vers 61); ferner folgt aus $\triangle BA'A \sim \triangle CG'G$, daſs $CG' = \frac{A'B \cdot GC}{AB} = \frac{A'B \cdot r}{BD}$ ist. Es ist aber $CG' = \sin CGG' = \sin OCG = \sin OG$, d. h. der Sinus der gesuchten Aszensionaldifferenz, und aus demselben erhält

man mit der Sinustabelle den Bogen OG, der zu 90^0 addiert den Stundenwinkel t_0 und von 90^0 subtrahiert, dessen Supplement liefert und somit die Dauer des halben Tages und der halben Nacht bestimmt.

Für die zweite Formel ergibt sich aus dem vorhergehenden Vers 60 noch eine etwas andere Form, indem daselbst $BD = CF = r - \text{sinvers}\,\delta$ gesetzt ist[1]); sie lautet dann

$$\sin\alpha = \frac{r\sin\delta \cdot HC}{(r - \text{sinvers}\,\delta)\cdot 12}$$

für $\alpha =$ Aszensionaldifferenz. Es ist merkwürdig, daſs die Inder, die doch den Cosinus kennen, ja sogar einen eigenen Namen „cotidjyâ“ für ihn haben, den Nenner nicht durch $\cos\delta$ ersetzt haben. Thut man dies und setzt zugleich $\frac{HC}{12} = \operatorname{tg}\varphi$, so kommt unsere Formel $\sin\alpha = \operatorname{tg}\delta \cdot \operatorname{tg}\varphi$. Es ist wohl zu bemerken, daſs Ptolemäus[2]) dieselbe mittelst des Satzes von Menelaus in der Form findet: $\text{crd}\,(2\alpha) = \frac{\text{crd}\,(2\delta)}{\text{crd}\,(180^0 - 2\delta)} \cdot \frac{\text{crd}\,(2\varphi)}{\text{crd}\,(180^0 - 2\varphi)}$; in diesen beiden Formen spricht sich deutlich die verschiedene Art der Ableitung aus.

An dieses Beispiel müssen wir noch ein zweites anschlieſsen, welches uns zu einer wichtigen Bemerkung Anlaſs bieten wird. In den Versen 34, 35 und 36[3]) ist die Aufgabe behandelt, die Sonnenhöhe zu einer beliebigen Stunde des Tages aus Meridionaldistanz, Deklination und Polhöhe zu bestimmen. Die Regeln lauten: „Wenn man den Radius um den Sinus der Aszensionaldifferenz vermehrt im Falle einer nördlichen Deklination, oder vermindert im Falle einer südlichen, so erhält man das Tagmaſs (antyâ, woraus sich der halbe Tagbogen bestimmen läſst); dieses vermindert um den Sinus versus des Stundenwinkels (nata), dann multipliziert mit dem Radius des Tagbogens und dividiert mit dem Radius (der Kugel) gibt den 'Divisor' (cheda); der letztere wieder multipliziert mit dem Sinus des Complementes der Breite und dividiert durch den Radius giebt den Sinus der Höhe...“[4]). In derselben Figur ist $\sphericalangle EPQ = t$ der Stundenwinkel, $\sphericalangle \Sigma CC' = h$ die Höhe der Sonne, dann folgt unmittelbar aus der Figur:

$$EG' = \text{sinvers}\,t_0 (= CE + \cos t_0 = r + \sin\alpha),\quad Q'E = \text{sinvers}\,t,$$

---

1) Im Pañchasiddhântikâ ist $BD = \sqrt{r^2 - \sin^2\delta}$ gesetzt. p. (27). Vers 23. — 2) Almagest lib. II. c. III. Ed. Halma 70—71. — 3) Sûrya-Siddhânta cap. III. Ed. Burgess 259—260. — 4) Dem Sinne nach die gleiche Regel findet sich im Pañchasiddhântikâ Vers 42, 43. p. (32), nur ist dort, wie überhaupt durchweg, der Sinus versus vermieden.

(Hier ist Q der Schnittpunkt des Kreises $P\Sigma P'$ mit dem Äquator, und Q' seine senkrechte Projektion auf die Meridianebene) und hieraus $EG' - Q'E = Q'G' = \text{sinvers}\, t_0 - \text{sinvers}\, t$. Es ist aber

$$\Sigma'A' = \frac{Q'G' \cdot BD}{CE} = \frac{(\text{sinvers}\, t_0 - \text{sinvers}\, t)\, BD}{r};$$

ferner ist $\sin h = \Sigma R = \Sigma' R'$, und da $\triangle \Sigma' R' A' \sim \triangle EHC$ ist, so folgt $\sin h = \frac{A'\Sigma' \cdot EH}{CE}$, also endlich

$$\sin h = \frac{(\text{sinvers}\, t_0 - \text{sinvers}\, t)\, BD \sin(90^0 - \varphi)}{r \cdot r},$$

welche Formel genau dem Wortlaute der Verse entspricht. Setzt man hier noch $BD = \cos\delta$ und $r = 1$, so kommt:

$$\sin h = (\text{sinvers}\, t_0 - \text{sinvers}\, t) \cos\delta \cos\varphi.$$

Beachtet man ferner, dafs $-\cos t_0 = \sin\alpha = \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi$ war, so geht diese letztere Formel schliefslich über in

$$\sin h = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos t,$$

in welcher Form wir sie durch direkte Anwendung unseres Cosinussatzes auf das $\triangle ZP\Sigma$ erhalten würden.

Damit ist also gezeigt, dafs sich schon bei den Indern die ersten Spuren des zweiten Hauptsatzes der sphärischen Trigonometrie finden[1]), indem die indische Formel für $\sin h$ demselben äquivalent wird, sobald man t_0 auf die früher angegebene Weise berechnet hat. Natürlich kann hier nur von Spuren dieses Satzes die Rede sein, denn weder gibt der Wortlaut der indischen Regel direkt diesen Satz, noch erkannten die Inder seine allgemeine Verwendbarkeit auf beliebige sphärische Dreiecke; dies war aber, wie wir sehen werden, auch bei den Arabern noch nicht der Fall, denen man bisher die Erfindung desselben zuschrieb. Dagegen wird sich zeigen, dafs er sich thatsächlich aus der Projektionsmethode des Analemmas entwickelt hat.

Solcher Beispiele liefsen sich noch eine ganze Reihe aus den Siddhântas der Inder anführen, doch hoffen wir, dafs die mitgeteilten genügen werden, um zu beweisen, dafs sie ihre Regel nicht durch Methoden der sphärischen Trigonometrie, wie sie Ptolemäus verwendet, sondern durch geschickte Anwendung ihrer Sinusrechnung auf jene Projektionsmethode gewannen, die die Grundlage der Gnomonik bildete[2]). Wahrscheinlich hat das Festhalten an dieser ihrer

1) Hierauf habe ich zuerst aufmerksam gemacht in den schon angeführten „Beiträgen" p. 15. — 2) Der Sinussatz für das rechtwinklige sphärische Dreieck findet sich übrigens in einer ihrer Regeln implizite angewendet, indem (cap. II. Vers 28

Sinusrechnung sie auch in späterer Zeit noch gehindert, sich der Methode des Ptolemäus zu bedienen, als dessen Almagest, der schon Varâha-Mihira bekannt war, in Indien längst Eingang gefunden hatte[1]). Auch der konservative Sinn der Brahmanen, in deren Händen die Pflege der als heilig geltenden Wissenschaften allein lag und heute noch liegt, mochte zu diesem Festhalten an einmal gewonnenen Methoden beitragen und einer weiteren Ausbildung indischer Trigonometrie hindernd im Wege stehen. Eine solche Ausbildung durch Verbindung der griechischen und indischen Trigonometrie wurde unserer Wissenschaft erst zuteil, als nach jener Periode des Niederganges der mathematischen Studien in Griechenland und den griechisch redenden Provinzen des Römerreiches, die wir im zweiten Kapitel berührten, ein orientalisches Volk das Erbe der Griechen und Inder übernahm, das aus einfachen Nomadenstämmen der arabischen Wüste hervorgegangen, in der kurzen Zeit zweier Jahrhunderte sich zu staunenswerter kultureller Entwickelung emporschwang. Seine hervorragenden Verdienste um unsere Wissenschaft sollen in den folgenden 2 Kapiteln geschildert werden.

4. Kapitel.

Ausbau der Trigonometrie bei den Ostarabern und Persern.

§ 1. Übergang der griechischen und indischen Mathematik in die Hände der Araber.

Im Jahre 622 der christlichen Zeitrechnung war Mohammed, der Prophet, aus seiner Vaterstadt Mekka geflohen und nach zehn Jahren erbitterter Kämpfe, die von wechselnden Erfolgen begleitet waren, starb er auf dem Gipfel seiner Macht. Doch diese kurze Zeit hatte genügt, um seinen fanatischen religiösen Ideen die Herrschaft zu sichern. Seine Nachfolger, die Khalifen, verbreiteten sie mit dem Schwerte, und die Annahme des neuen Glaubens war vor allem die

---

des Sûrya-Siddhânta. Ed. Burgess 201) die Deklination aus der Ekliptikschiefe und der Länge durch die Formel $\sin \delta = \frac{\sin \varepsilon \cdot \sin \lambda}{r}$ berechnet wird; aber auch diese läfst sich leicht mit Hilfe der Projektionsmethode finden; a. a. O. 202.

1) Vgl. Cantor I. 559—560. — Chr. Henry's Ansicht (Lettre à M. le prince Boncompagni sur divers points de l'histoire des mathématiques. Bulletino di bibliogr. e di storia XX. 392), dafs die Inder die 4 Grundregeln des sphärischen Dreieckes, wie Ptolemäus, besafsen, kann ich mich nach eingehendem Studium der Siddhântas nicht anschliefsen.

Bedingung für die Erlangung des Bürgerrechtes und der Zugehörigkeit zur herrschenden Klasse. Aber wenn auch der Fanatismus der ersten Nachfolger des Propheten Gesetze aufstellte, nach welchen kein Christ oder Jude in Staatskanzleien angestellt werden durfte[1]), ja wenn selbst noch im 8. Jahrhundert der Khalif Hârûn Arraschîd (786—809) verordnete, dafs die Andersgläubigen sich einer besonderen Kleidung bedienen müfsten[2]) und dafs alle Kirchen niederzureifsen seien, so wurden diese Bestimmungen doch nach und nach immer laxer gehandhabt und vielfach umgangen. Der Grund hierzu lag einfach darin, dafs die arabischen Herrscher mit sicherem Blicke erkannten, wie notwendig ihnen zur Begründung ihrer Weltherrschaft die hohe geistige und kulturelle Entwicklung der unterworfenen Völkerstämme sei, die sie daher nicht verdrängten, sondern ihren eigenen Zwecken dienstbar zu machen suchten.

Von Damaskus, der Residenz der ersten Khalifen aus dem Stamme der Omajaden, verlegten die Abbasiden, die im Jahre 750 die Herrschaft an sich gerissen hatten, vier Jahre später unter Al-Manṣûr (754—775) ihren Sitz nach Bagdad am Euphrat, wo früher die Weltstadt Babylon gelegen war. Sie verstanden es, diese Stadt nicht nur zum Zentrum der äufseren politischen Macht, sondern auch zur Metropole einer neuen Kulturentwickelung zu erheben, in der namentlich die mathematischen und astronomischen Wissenschaften nach ihrem Niedergange unter der Herrschaft der Römer eine erste Neublüte erlebten.

Nachdem das Arabische die allgemeine Litteratursprache geworden war, begann eine ungemein fruchtbare übersetzerische Thätigkeit. Aus dem Syrischen, aus dem Persischen, aus dem Griechischen, aus dem Indischen wurden wertvolle Werke durch eingeborene Andersgläubige übertragen[3]) und der Öffentlichkeit übergeben: ihre befruchtende Wirkung liefs auch nicht lange auf sich warten. Unter den ersten Abbasiden waren es namentlich der schon erwähnte Al-Manṣûr, dann Hârûn Arraschîd und vor Allen Al-Mamûn (813—833), die sich mit den bedeutendsten Gelehrten ihrer Zeit umgaben und deren wissenschaftliche Bestrebungen auf das kräftigste unterstützten. Mit ihrer Regierungszeit beginnt die Geschichte der mathematischen Wissenschaften bei den Arabern.

Aus zwei Quellen namentlich flossen den Arabern die Kenntnisse

---

1) G. Weil, Geschichte der islamitischen Völker von Mohammed bis zur Zeit dès Sultans Selim übersichtlich dargestellt. Stuttgart 1866. 8°. p. 20. — 2) A. v. Kremer, Kulturgeschichte des Orients unter den Chalifen. Wien 1877. II. 167. — 3) Cantor I. 654.

in Mathematik und Astronomie zu: aus dem Wissen der Inder und aus dem der Griechen. Schon unter den ersten Abbasiden wurden indische Werke der schönen Litteratur, Werke über Musik, Medizin und Astrologie nach Bagdad gebracht und in die Landessprache übersetzt. Was aber speziell die Einführung der indischen Astronomie und damit der trigonometrischen Kenntnisse der Inder anlangt, so ist uns eine Erzählung darüber erhalten, aus der wir das Wichtigste mitteilen. „Im 156. Jahre der Hidschra (773)", so erzählt der Astronom Ibn Al-Adamî[1]), „erschien vor dem Khalifen Al-Manṣûr ein Mann, welcher in dem unter dem Namen Sindhind bekannten Kalkül.... sehr unterrichtet war. Dieser befafs Methoden, um die Gleichungen zu berechnen, welche auf die von $\frac{1}{2}^0$ zu $\frac{1}{2}^0$ bestimmten kardadjas gegründet sind.... Alles dies befand sich in einem Werke, von dem er sagte, er habe es aus den kardadjas ausgezogen, welche den Namen eines indischen Königs tragen, der Figar heifst, und für eine Minute berechnet waren. Al-Manṣur befahl dieses Werk ins Arabische zu übersetzen und darnach ein Buch zu verfassen, welches die Araber zur Grundlage ihrer Rechnungen über die Planetenbewegungen nehmen könnten. Diese Arbeit wurde dem Moḥammed ben Ibrâhîm Al-Fazârî anvertraut, welcher darnach ein Werk schuf, welches die Astronomen den grofsen Sindhind nennen.... Die Gelehrten dieser Zeit bis zur Epoche des Al-Mamûn arbeiteten namentlich nach diesem Werke. Für letzteren wurde ein Auszug aus dem Buche hergestellt von Abû Dscha'far Moḥammed ben Mûsâ Al-Chwarizmî, welcher sich desselben auch zur Abfassung seiner Tafeln bediente, die in den Ländern des Islam berühmt sind.... Er stellte seine Gleichungen nach der Methode der Perser und die Deklinationen der Sonne nach der Art und Weise des Ptolemäus auf.... Diejenigen Astronomen jener Zeit, welche sich der Methoden des Sindhind bedienten, schätzten das Werk sehr und verbreiteten es rasch...."

Es besteht kein Zweifel, dafs der in dieser wichtigen Erzählung erwähnte grofse Sindhind[2]) einer der Siddhântas der Inder war, und

---

1) Al-Hosaîn ben Moḥammed ben Ḥâmid, genannt Ibn Al-Adamî, lebte um 900. Sein von ihm verfafstes Tafelwerk wurde 920 nach seinem Tode von einem Schüler herausgegeben. Notices et extraits des manuscrits de la Bibl. nat. VII. 126. Anm. 3. Auch ein späterer arabischer Schriftsteller Ibn al Kiftî im 13. Jahrh. führt in seinem Werke Taryk Al-Hokamâ, d. i. Chronik der Gelehrten, einen Teil dieser Erzählung an. Casiri, Bibliotheca arabico-hispana I. 428. — 2) Es beweist dies unter anderem eine Stelle in Al-Bîrûnîs „India", die Reinaud in seinem Mémoire geographique, historique et scientifique sur l'Inde (Mém. de l'Inst. Nat. de France, acad. des inscr. et des belles lettres. XVIII, Paris

Wöpcke[1]) und Sachau[2]) haben durch eingehende Untersuchungen festgestellt, dafs hiermit kein anderer als der Siddhânta Brahmaguptas' gemeint ist, dessen vollständige Veröffentlichung daher von grofsem Interesse wäre[3]).

Betrachten wir die obige Mitteilung genauer, so fällt uns zunächst das Wort kardadja auf. Es ist dasselbe zweifelsohne[4]) aus dem indischen kramadjyâ, gerader Sinus, im Gegensatz zu sinus versus, entstanden und bezeichnete somit anfangs jeden Sinuswert, wurde aber dann später demjenigen Sinus allein beigelegt, der gleich seinem Bogen ist. Noch später bezeichnete man damit gewisse andere Sinusse, wie sin 15^0 [5]), in welcher Bedeutung wir das Wort kardaga sogar noch im 15. Jahrhundert z. B. bei G. Peurbach antreffen werden[6]). Weiter entsteht die Frage, ob die erwähnten Tafeln die von uns mitgeteilten indischen Tafeln waren, oder ob sie sich etwa an jene anlehnten, deren Berechnungsmethoden im Siddhânta-Çiromâṇi angegeben sind (Seite 37), und die von Grad zu Grad fortlaufen. Fast möchte man der letzteren Ansicht zuneigen[7]), da es heifst, die kardadjas waren von $\frac{1}{2}^0$ zu $\frac{1}{2}^0$ berechnet, doch läfst sich diese Frage nicht endgiltig entscheiden, solange man den Brâhma-

---

1849. 331) übersetzt hat. Daselbst heifst es: „Le mot Sindhind qui est usité chez nous, répond à ce que les Indiens nomment Siddhânta."

1) Journal asiatique 6. Serie. I. 1863. Wöpcke sagt daselbst, der im Texte erwähnte König Figar sei identisch mit Vyâgr'a oder Vyâgr'amûka, unter welchem Brahmagupta im Jahre 628 sein Werk verfafste. — 2) E. C. Sachau sagt in seiner Übersetzung von Al-Bîrûnîs „India" II. 191: „It was he, who taught the Arabs astronomy before they became acquainted with Ptolemy; for the famous Sindhind of the Arabian litterature, frequently mentioned, but not yet brought to light, is a translation of his Brahmasidhânticâ." — 3) Colebrooke hat a. a. O. nur die mathematischen Kapitel desselben veröffentlicht. — 4) Reinaud, Mémoires de l'Académie des inscriptions et des belles lettres XVIII. 313 und Wöpcke, Nouvelles Annales de math. 1854. XIII. 386. — 5) Steinschneider, Miscellen aus der Geschichte der Mathematik. Bibliotheca mathematica. Serie 2. V. 114 findet diese Bedeutung bei Gerhard von Cremona. — 6) Peurbach und seine Zeitgenossen haben das Wort kardaga aus den Toledanischen Tafeln des spanischen Arabers Al-Zarkâli oder Arzachel entnommen. Darüber, dafs sich dieses Wort in der a. Bedeutung in jenen Tafeln findet, vgl. B. Boncompagni, Intorno all' opera d'Albiruni sull' India. Bulletino di bibl. e di storia II. 184—185. — 7) Für diese Ansicht hat man noch die Stelle jener Erzählung angeführt, welche lautet: „Die kardadjas waren für eine Minute berechnet." Doch scheint hier die Interpretation Wöpckes, dieser Ausdruck bedeute „bis auf eine Minute genau" richtig zu sein, da in der ganzen uns bekannten Hindulitteratur Sinuswerte von Bögen, die von Minute zu Minute fortschreiten, nirgends zu finden sind.

sphuta-siddhânta nicht selbst kennt. Wir werden übrigens sehen, daſs die Araber noch manches andere, als die Sinustafeln der indischen Litteratur entnommen haben.

Ungefähr um dieselbe Zeit, als die Araber mit indischer Wissenschaft bekannt wurden, fingen sie auch an, sich mit der reichen griechischen Litteratur zu befassen. Zuerst waren es syrische Ärzte, die an den Hof nach Bagdad berufen wurden und infolge ihrer feinen Bildung bald hohes Ansehen genossen, das sich rasch auf das ganze Griechentum und dessen Wissenschaft übertrug. So wissen wir[1]), daſs bereits Hârûn Arraschîd's Wezir Jaḥjâ ibn Châlid, der Barmekide, den Almagest übersetzen lieſs, doch scheint diese Übersetzung nicht besonders gelungen zu sein, da sie noch unter demselben Herrscher von Abû Ḥasan und Salmân und dann durch Haddschâdsch ibn Jûsuf ibn Maṭar verbessert wurde. Ein Jahrhundert später folgt dann wieder eine neue Übersetzung desselben Werkes durch Ḥunain ibn Isḥâḳ († 873), die aber ebenfalls sehr der Verbesserung bedurfte, da dieser Gelehrte wohl ein ausgezeichneter Philologe, aber kein Mathematiker war. Beide Eigenschaften aber vereinigte in sich der gelehrte Thâbit ibn Ḳurrah (836—901), der denn auch eine nach allen Richtungen hin entsprechende Übersetzung des Almagest lieferte, die von dem etwas späteren Al-Farabi (890—953)[2]) mit einem Kommentar versehen wurde. Thâbit behandelte auch den Satz des Menelaus in einem eigenen Buche[3]), aus welchem wahrscheinlich das in späteren Schriften erwähnte „lemma in 18 modis" herstammt. Es sind hiermit einfach die 18 verschiedenen Formen gemeint, in welche sich eine Produktengleichung des Transversalensatzes umschreiben läſst, wenn man sie als zu-

---

1) Vgl. bezüglich dieser und der folgenden Angaben Cantor I. 660—662. — 2) M. Steinschneider, Al-Farabi, des arabischen Philosophen Leben und Schriften. Mém. de St. Petersburg. 7. Serie. XIII. — 3) Gerhard von Cremona (1114—1187) hat die Schrift unter dem Titel „Liber thebit de figura alkata (Katta = sector) tractatus I übersetzt. Über diese figura kata gibt es eine Reihe von Abhandlungen. Eine arabische Handschrift befindet sich in der vizekönigl. Bibl. zu Kairo. Vgl. Suter, Zeitschr. f. M. u. Phys. XXVIII. 20. Ein Manuskript der erwähnten lateinischen Übers. ist in der Bibliothèque nat. zu Paris Cod. 7377B, ein anderes ebenda Cod. 952. 2 (Suppl. arab.), desgleichen in der öffentlichen Bibl. zu Basel Cod. F. II. 33. Vgl. weitere Litteraturangaben: M. Steinschneider, Die mittleren Bücher der Araber, Ztsch. f. M. u. Ph. X. 494 ff. und „Die Mathematik bei den Juden." Bibl. math. 1897. 78 und 80, sowie M. Curtze, Über die Handschrift R. 4°. 2, Problematum Euclidis explicatio der kgl. Gymnasialbibl. zu Thorn. Zeitschr. f. M. u. Ph. Suppl. zu XIII. 64 ff. und 100, endlich H. Suter, Abhandl. zur Gesch. d. Math. Heft 6. 25 und 59.

sammengesetzte Proportion darstellt[1]). In einem Bruchstück[2]) dieser Schrift, das uns im Druck erhalten ist, stellt Tâbit ein Lemma auf, um einen einfacheren Beweis des Transversalensatzes zu ermöglichen, welches später zu der schon früher (S. 17) erwähnten „Regel der vier Grö-ſsen“ führte, die bei den Arabern bald den schwerfälligen Satz des Ptolemäus verdrängte. Um dasselbe darzustellen seien ABG und AEG (Fig. 16) zwei gröſste Kugelkreise, O der Kugelmittelpunkt. Von den Endpunkten der Bögen AE und AZ seien die Senkrechten EK und ZL auf die Ebene des zweiten Kreises gefällt und EH und $ZT \perp AG$ gezogen, so ist $\triangle EHK \sim \triangle ZTL$ und also $EH : ZT = EK : ZL$, oder $\sin AE : \sin AZ = EK : ZL$. Soweit Tâbit in seinem Lemma. Beachtet man noch, daſs $EK = \sin EM$ und $ZL = \sin ZN$ ist, so folgt die Regel der vier Gröſsen $\sin AE : \sin AZ = \sin EM : \sin ZN$. Ob Tâbit in seiner Schrift den letzten Schluſs schon machte, also die Regula quatuor quantitatum bereits fand, wissen wir nicht, es scheint uns jedoch sehr wahrscheinlich, da diese Folgerung unmittelbar in die Augen springt. Aus Tâbits Arbeiten erkennt man bereits eine vollständige Vertrautheit mit den trigonometrischen und astronomischen Methoden der Griechen, die aber auch sofort durch Aufnahme des indischen Sinus wesentlich vereinfacht werden.

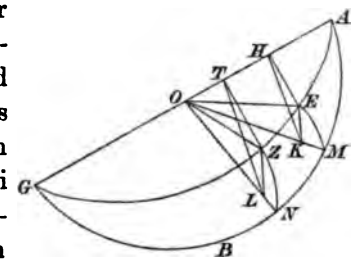


Fig. 16.

§ 2. Al-Battâni und sein Buch über die Sterne.

Halten wir Umschau in der uns überkommenen Litteratur der Araber, so müssen wir leider erkennen, daſs dieselbe noch sehr wenig erschlossen und allgemein zugänglich gemacht ist. Eine Menge von Werken arabischer Gelehrter harrt noch im Staube der Bibliotheken vergraben der kundigen Hand, die sie zu neuem Leben erwecken

1) In meiner Schrift Nassîr Eddîn Tûsi und Regiomontan. Abh. der Kais. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher LXXI. Halle 1897. 4°. habe ich p. 36 bereits darauf hingewiesen, daſs die sämtlichen 18 Fälle in einem Auszug aus Tâbit's Schrift enthalten sind, den Maurolykus in seiner Übersetz. des Menelaus mitteilt. car. 38. lemma 4. Vgl. Näheres hierüber a. a. O. 36. Anm. 1 und 43. — 2) Das Bruchstück aus Tâbit's Kommentar teilt auch Naṣîr Eddîn Tûṣi in seiner Schrift „Schakl al Kaṭṭa“, d. h. „Satz von der schneidenden Linie“, p. 200—202 mit, das unter dem Titel: Traité du quadrilatère attribué à Nassiruddin-el-Toussy von Alexandre Pacha Caratheodory Constantinople 1891 in 8°. mit einer französischen Übersetzung erschien.

soll, und man sieht sich daher bei der Entwicklungsgeschichte irgend einer Wissenschaft in jener Kulturepoche stets der Gefahr ausgesetzt, wichtige Zwischenglieder zu übergehen. So fehlen uns jener bereits (S. 44) erwähnte grofse Sindhind des Al-Fazârî (um 772), sowie die unter dem Namen „der kleine Sindhind" bekannten astronomischen Schriften des Muḥammed ben Mûsâ Al-Chwarizmî (um 830)[1]), die teils auf griechischer, teils auf indischer Basis beruhten, und die Bruchstücke der Werke seines Zeitgenossen Al-Fergâni († 833 oder 834), des Rechners[2]), die noch erhalten sind, bilden einen völlig ungenügenden Ersatz, da sie nur ganz allgemeine Betrachtungen, aber keinerlei Rechnungen enthalten[3]). Mehr bietet uns das Buch des Syrers Muḥammed ibn Dschâbir ibn Sinân Abû ʿAbdallâh al Battâni, von den Übersetzern Albategnius genannt, das er über die Bewegung der Sterne schrieb. Er gehörte jedenfalls zu den bedeutendsten Astronomen der berühmten Schule von Bagdad, sowohl als Beobachter, als auch als Theoretiker und wird mit Recht der Ptolemäus der Araber genannt[4]). Seine Beobachtungen, die er in Ar-Raḳḳa anstellte, fallen in die Zeit von 878—918, gestorben ist er 929.

Wir haben noch eine von Regiomontan kommentierte Übersetzung des erwähnten Werkes, die von Plato von Tivoli, einem Gelehrten des 12. Jahrhunderts[5]), herstammt. Dieser war der Mathematik wenig kundig und schrieb aufserdem ein barbarisches Latein; aber dennoch zeigt uns seine Übersetzung, wie die Araber die von den Griechen und Indern überkommenen Kenntnisse zu erweitern

---

1) Al-Chwarizmî's astronomische Tafeln wurden von dem irischen Mönch Atelhart von Bath ins Lateinische übersetzt, und es existieren noch mehrere Exemplare dieser Version. Vgl. M. Chasles, Comptes Rendus de l'Académie de Paris 1846. t. 23. 848. Leider teilt Chasles nur Weniges aus ihnen mit. — 2) Vgl. über Muḥammed ibn Kathîr Al-Fergâni, den Astronomen des Al-Mamûn, Wüstenfeld: Die Übersetzungen arabischer Werke ins Lateinische. Abh. der k. Gesellsch. der W. zu Göttingen XXII. 1877. 26 und M. Steinschneider: Vita di matematici Arabi. Bulletino di bibliografia e di storia V. 433. Anm. 3. — 3) In Montucla's Histoire des mathématiques I. an VII. Paris. 4°. 373 ist angeführt, dafs sich von ihm noch eine Abhandlung über Sinusse erhalten habe. Leider gibt Montucla nichts Genaueres darüber an, ob in diesem Werke noch die indische Sinustafel beibehalten ist, oder bereits die Tafel des Ptolemäus in eine solche umgeschrieben wurde. — 4) M. Casiri, Bibliotheca arabico-hispana I. 343. — 5) M. Cantor I. 853. — Die Ausgabe Regiomontans hat den Titel: Rudimenta Astronomica Alfragani, item Albategnius astrorum peritissimus de motu stellarum . . . omnia cum demonstrationibus geometricis et additionibus Joannis de Regiomonte. Norimbergae 1537 in 4°. Ein unveränderter Abdruck des Werkes erschien Bononiae 1645. Uns lagen beide Ausgaben vor.

und fortzubilden verstanden. Da fesselt nun unser Interesse zunächst der Sinus, der hier zum erstenmale in der bis jetzt gedruckten Litteratur auftritt, woraus jedoch keineswegs geschlossen werden darf, wie das schon geschah, Al-Battâni habe ihn in die arabische Litteratur eingeführt, denn er findet sich, worauf schon 1846 M. Chasles hinwies[1]), bereits in dem kleinen Sindhind, den Al-Chwarizmî aus dem grofsen Sindhind ausgezogen hatte, und diese Werke waren keineswegs unter dem Einflusse der griechischen Schriften wieder in Vergessenheit geraten[2]), sodafs Al-Battâni den Sinus abermals neu hätte einführen müssen, wie man annehmen zu müssen geglaubt hat.

Die Araber hatten zur Bezeichnung des Sinus das Wort „dschaib", welches ebenfalls direkt auf indischen Ursprung hindeutet. Nach der Ansicht des französischen Orientalisten Munck, die erst kürzlich durch eine Notiz von J. Raska[3]) eine neue Stütze erhalten hat, übernahmen sie nämlich das von den Indern auch für die halbe Sehne gebrauchte Wort dschyâ oder dschîva und schrieben es dem Wortlaute nach dschîba. Aber die Konsonanten, welche dschîba zu lesen sind, lassen, wenn die diakritischen Punkte, die die Vokale bestimmen, nicht gesetzt werden, auch die Lesart dschaib zu, eine Lesart, die sich schliefslich einbürgern mufste, da sie dem arabischen Ohr die natürlichste erschien. Denn dschaib ist ein wirkliches arabisches Wort, das Busen, Herz, Bausch oder Tasche bedeutet. „Aus einem unverstandenen Fremdwort wurde so ein ähnlich klingendes der eigenen Sprache, ein in der Sprachgeschichte so gewöhnlicher Vorgang, dafs es überflüssig ist, Beispiele anzuführen." Unser Wort Sinus ist demnach eine wörtliche Übersetzung des arabischen Ter-

1) Chasles hat in der S. 48. Anm. 1 angeführten Abhandlung (p. 850) darauf aufmerksam gemacht, dafs in dem astronomischen Werke des Al-Chwarizmî thatsächlich eine Sinustafel enthalten ist. Der Übersetzer nennt hier die Sinusse elgeib nach dem arabischen Namen elgeib elmustewi seu planum, der gerade Sinus, und elgeib elmacus seu diminutum, der Sinus versus. Aufserdem nennt er argument den gegebenen Bogen, mit welchem man in die Tafel eingeht. Daher unser noch gebräuchliches Wort Argument. Man erkennt in dem Worte elgeib sofort das Wort dschaib mit dem arabischen Artikel el oder al. Vgl. hierüber den folgenden Text. — 2) Dafs dies nicht der Fall war, beweist jene Übersetzung Atelharts aus dem 12. Jahrhundert, vgl. auch Wüstenfeld a. a. O. 21 – 22 und Reinaud, Géographie d'Aboulfeda. Paris 1848. 4°. I, XLVIII und XLIX. Noch beweiskräftiger ist aber der Umstand, dafs der Araber Abû'l Ḥasan 'Ali von Marokko in seinem von Sédillot übersetzten Werke: Traité des instruments astromiques. Paris 1843. 4°. eine inverse Sinustafel mitteilt, die er p. 120 „Tables de sinus Rhhovarzémie" nennt. Diese stammt also offenbar aus dem Werke des Al-Chwarizmî. — 3) Zeitschr. f. M. u. Phys. 1895. Litt.-hist. Teil. 126 ff.

minus[1]) und stammt von irgend einem jener Gelehrten, die im 12. Jahrhundert eine Menge arabischer Schriften ins Lateinische übertrugen. Dafs übrigens nicht Plato von Tivoli in seiner Übersetzung des Al-Battâni zuerst dieses Wort eingeführt hat, wie man jetzt sehr häufig lesen kann, darauf haben schon Kästner[2]) und andere aufmerksam gemacht. Es findet sich nämlich nur einmal im Texte die Bezeichnung sinus versus[3]), sonst heifst es daselbst beständig „chorda" und „chorda versa", und Al-Battâni sagt eingangs seiner Schrift[4]) ausdrücklich, er werde die halbe statt der ganzen Sehne nehmen, dafür aber zur Abkürzung stets „chorda" schreiben.

Der fruchtbarste Übersetzer arabischer Werke im 12. Jahrhundert war Gerhard von Cremona (1175 in Toledo) und dieser war es wahrscheinlich, der durch seine Wiedergabe verschiedener astronomischer Werke der Westaraber, auf die wir noch zu sprechen kommen, die Einführung des Wortes sinus im Abendlande verschuldete. In der That waren seine Übersetzungen die Hauptquelle[5]), durch welche dem lateinischen Mittelalter die astronomischen Kenntnisse der Araber zuflossen.

Doch kehren wir wieder zu dem Buche über die Sterne zurück! Al-Battâni gibt daselbst, nachdem er den Sinus als halbe Sehne definiert hat, ganz an Ptolemäus anschliefsend, Methoden zur Berechnung einer Sinustafel von $\frac{1}{2}$ zu $\frac{1}{2}$ Grad[6]) und wendet sie, eben-

---

1) Dafs auch dschaib schon in den ersten Zeiten des Mittelalters in dieser Bedeutung aufgefafst wurde, hat Raska a. a. O. durch Belege aus syrischen Handschriften nachgewiesen. — 2) Gesch. der Mathem. I. 522. — 3) In der a. Ausgabe von 1537 steht diese Stelle im Cap. III. car. 7^v und ist in demselben Satze auch das Wort chorda versa gebraucht. Daraus geht zur Genüge hervor, dafs das Wort sinus an dieser einzigen Stelle nur aus den Noten Regiomontans, der sich beständig der Bezeichnung sinus bedient, durch ein Versehen des Herausgebers in den Text kam. — 4) „Nos autem (im Gegensatze zu Ptolemäus) dimidium cordae duplicatis unius cujusque arcuum quartae circuli sumpsimus . . . et ne in sequentibus haec nobis iterare necesse sit, edicimus, omnem tractatum nostrum, sive mentionem cordarum de medietatis cordis opportere intelligi, nisi aliquo proprio nomine signaverimus, quod et cordam integram appellabimus." Aus dieser Stelle darf jedoch nicht der Schlufs gezogen werden, zu Al-Battânis Zeit habe die Bezeichnung dschaib noch nicht existiert und das Wort sei daher nicht indischen Ursprunges, denn, wie erwähnt, kommt dasselbe bereits im kleinen Sindhind vor; Al-Battâni scheint vielmehr das den Sinn nicht deckende Wort absichtlich vermieden zu haben, umsomehr als er sich an Ptolemäus anschlofs. — 5) Wüstenfeld a. a. O. 55. Die von Gerhard herstammende Übersetzung des astronomischen Werkes von Dschâbir ibn Aflah (siehe weiter unten) enthält beständig das Wort „Sinus". — 6) Die uns vorliegenden Ausgaben enthalten übrigens die Tafeln selbst nicht, da man zur Zeit ihrer Veröffentlichung bereits die genaueren Tabellen Regiomontans hatte.

falls dem Griechen folgend, auf verschiedene astronomische Aufgaben an. Wichtiger ist seine Bestimmung der Sonnenhöhe mittelst des Gnomons. Bezeichnet l die Länge desselben, h die Sonnenhöhe und x die Schattenlänge, so stellt sich seine Regel durch die Gleichung dar $x = l \cdot \frac{\sin(90^0 - h)}{\sin h}$, die er aus dem Schattendreieck ableitet. Mit Hilfe dieser Bezeichnung, die wir durch $x = l \operatorname{ctg} h$ ausdrücken, scheint er sich nun eine kleine Tabelle hergestellt zu haben[1]), welche die Schattenlängen zu den um ganze Grade fortschreitenden Sonnenhöhen angab und ihm auch umgekehrt die Bestimmung der Sonnenhöhe aus der Schattenlänge ermöglichte. Diese Tabelle ist somit die erste Cotangententabelle, der man in der Litteratur begegnet; Al-Battâni erkannte jedoch ihren allgemein trigonometrischen Wert nicht, sie diente ihm nur zu den angeführten Zwecken. Dies geht schon daraus hervor, dafs er die Höhe des Gnomons gleich 12^p setzt, während der Radius seiner Sinustabelle, wie bei den Griechen 60^p ist. Unzweifelhaft folgt er hierin indischen Vorbildern, denn, wie wir schon sahen (S. 39), teilten auch die Inder das Gnomon in 12 Finger[2]), während Ptolemäus die Einteilung in 60^p hat[3]). Auch stimmen die von den Indern angegebenen Regeln genau mit jenen des Al-Battâni überein, der sie nur in einer Form mitteilt, aus welcher man sieht, dafs er sie geometrisch abzuleiten imstande war[4]).

Wir haben schon bei einer anderen Gelegenheit[5]) darauf hingewiesen, dafs gerade diese geometrischen Ableitungen der verschiedenen hier einschlägigen Formeln darauf hindeuten, dafs die Araber nicht, wie Delambre und im Anschlufs an ihn neuere Geschichtsschreiber meinten[6]), eine Art Formelsprache oder wenigstens ab-

---

1) Er spricht nämlich car. 14^v von einer solchen, abgedruckt ist sie jedoch nicht. — 2) Sûrya-Siddhânta. Cap. III. Vers 2. Ed. Burgess. 239. In den Libros del Saber Alfons' X. von Castilien (Ed. D. Manuel Rico y Sinobas. 5 Bände. Madrid 1863—1867 in 2°) steht III. 305 ebenfalls eine Schattentafel, in welcher das Gnomon direkt in 12 Finger geteilt ist. Alfons' astronomische Kenntnisse beruhen aber vollständig auf denen der Westaraber, sodafs kein Zweifel besteht, dafs letztere auch die Teilung in 12 Finger besafsen, die somit direkt auf indischen Ursprung hinweist. — 3) Almagest. Ed. Halma I. 75. Ed. Heiberg 100. — 4) Will er z. B. aus dem Schatten die Höhe berechnen, so bildet er zuerst den „Schattendurchmesser, umbrae triangulari diametrum", das ist die Hypotenuse des Schattendreieckes $\sqrt{l^2 + x^2}$ und findet dann aus letzterem $\sin h : 60 = l : \sqrt{l^2 + x^2}$ und $\cos h : 60 = x : \sqrt{l^2 + x^2}$, Formeln, die deutlich zeigen, dafs sie durch Reduktion des Schattendreieckes auf ein ihm ähnliches mit der Hypotenuse 60^p gewonnen wurden. Bezüglich der Übereinstimmung dieser Regeln mit den entsprechenden im Sûrya-Siddhânta, vgl. daselbst Cap. III. Vers 13. und 14. Ed. Burgess 250. — 5) Beiträge 22—27. — 6) Delambre, Histoire de l'Astronomie du moyen âge, Paris 1819 in 4°. 128.

kürzende Bezeichnungen besafsen, für welche sich auch in der That in der ganzen bis jetzt bekannt gewordenen Litteratur kein Beispiel findet. Wir werden im Gegenteil später sehen, dafs sie selbst die schwierigsten Rechnungen an der geometrischen Figur durchzuführen verstanden.

Bemerkt mufs noch werden, dafs Al-Battâni bereits zweierlei Schatten unterscheidet, je nachdem das Gnomon senkrecht auf einer horizontalen oder auf einer vertikalen Wand steht; der erstere wird in der Übersetzung mit „umbra extensa" oder als Schatten schlechthin bezeichnet, während der letztere „umbra versa" heifst. Wie sich zeigen wird, gaben diese Schatten sehr bald Veranlassung zur Einführung der Cotangenten und der Tangenten in die Trigonometrie der Araber.

Noch mehr, als Al-Battâni's Gnomonik, erinnern jene Regeln an indischen Ursprung, die er angibt, um von den vier Gröfsen: Stundenwinkel, Sonnenhöhe, Deklination und Polhöhe je eine aus den drei übrigen zu berechnen. Zu ihrer Lösung bedient er sich nicht der Methode des Ptolemäus, der ihm sonst überall Leitstern ist, sondern jener Projektionsmethode, die die Inder so praktisch zu verwerten wufsten[1]). Um z. B. die Sonnenhöhe aus den drei übrigen Stücken zu bestimmen, gibt er eine Regel[2]), deren Wortlaut genau durch folgende Formel wiedergegeben wird:

$$\sin h = \frac{(\text{sinvers } t_0 - \text{sinvers } t)\sin(90^0 - (\varphi - \delta))}{\text{sinvers } t_0}.$$

Die hier vorkommenden Gröfsen sind dieselben, die wir im 3. Kap. § 2 gebrauchten, und ihre Ableitung läfst sich unmittelbar aus der dort gegebenen Figur (S. 39) ablesen. Vergleicht man sie mit der dort gegebenen Formel der Inder (S. 41), so sieht man, dafs sie durch die Substitution $\frac{\sin(90^0 - (\varphi - \delta))}{\text{sinvers } t_0} = \frac{BD \cdot \sin(90^0 - \varphi)}{r \cdot r}$ in jene übergeht. Aber auch diese letzte Gleichung ergibt sich unmittelbar aus unserer Figur. Denn fällt man daselbst noch $DD' \perp SN$, so ist $\sin(90^0 - (\varphi - \delta)) = DD'$, $\text{sinvers } t_0 = EG'$ und $\sin(90^0 - \varphi) = EH$; also mufs sein: $\frac{DD'}{EG'} = \frac{BD}{r} \cdot \frac{EH}{r}$ oder $\frac{r}{EG'} = \frac{BD}{r} \cdot \frac{EH}{DD'}$.

Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Leipzig 1874. 8°. 281. Wir zitieren künftig kurz Hankel. — Cantor I. 694.

1) Darauf deutet einmal die cart. 17r gegebene Figur und dann eine Bemerkung Regiomontans hin (a. a. O. cart. 16r), welcher sagt: „Albategnius bediente sich in seinen vielen Beweisen der geraden Linien und schlofs vieles aus der Ähnlichkeit der Dreiecke." Es scheint demnach, dafs Regiomontan die Beweise des Albategnius, die in der Druckausgabe nicht angeführt sind, kannte. — 2) Cap. XVII. cart. 20r.

Es ist aber $\triangle DD'A \sim \triangle EHC$, also $r : DA' = EH : DD'$ und desgleichen $DA' : EG' = BD : r$, da $\triangle DA'A \sim \triangle EG'G$ ist. Durch Multiplikation folgt aus diesen beiden Proportionen das Gewünschte. Der Unterschied der indischen Formel von der Al-Battâni's besteht also nicht in der Methode der Ableitung, sondern nur darin, dafs letzterer die Mittagshöhe arc. $SD = 90^0 - (\varphi - \delta)$ einführt.

Auf gleiche Weise löst Al-Battâni noch eine Reihe von Aufgaben, von denen wir noch die eine, das Azimut A der Sonne aus Deklination, Sonnenhöhe und Polhöhe zu bestimmen[1]), hervorheben müssen. Die von ihm hierzu gegebene Regel gibt in unsere Formelsprache übersetzt genau:

$$\sin(90^0 - A) = \frac{\left(\frac{r \sin(90^0 - \delta)}{\sin(90^0 - \varphi)} - \frac{\sin h \sin \varphi}{\sin(90^0 - \varphi)}\right) r}{\sin(90^0 - h)},$$

eine Formel, die für $r = 1$ und Einführung der Cosinusse direkt in unsern sphärischen Cosinussatz übergeht. Wir haben hier die älteste Stelle in der bis jetzt zugänglichen Litteratur, an welcher unser zweiter Fundamentalsatz der sphärischen Trigonometrie vollständig auftritt. Aber dennoch glauben wir nicht, dafs man berechtigt ist, Al-Battâni den Erfinder dieses Satzes zu nennen, wie dies von anderer Seite[2]) geschehen ist. Denn genau ebensowenig wie die Inder hat Al-Battâni eine Idee davon, dafs er mit seiner Projektionsmethode einen trigonometrischen Satz fand, der für jedes sphärische Dreieck verwendbar ist. Seine Regel, die sich

---

1) a. a. O. Cap. XI. cart. 15r. — 2) H. Hankel 281 und Cantor I. 694. Hankel sagt hier: „Von den trigonometrischen Fundamentalsätzen kennt Al-Battâni aufser denen des Almagest bereits die Formel

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

für schiefwinklige Dreiecke, die er daher nicht immer in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen mufs, und weifs dieselbe, um eine Multiplikation zu ersparen, in die Form zu setzen $\text{sinvers}\, \alpha = \frac{\cos(b - c) - \cos a}{\sin b \sin c}$." Aber weder die erste, noch die zweite dieser Formeln kommt bei ihm irgendwo vor. Hankel's Irrtum scheint mir aus Delambre's Hist. de l'Astr. du moyen âge p. 20 zu stammen, denn dieser führt dort in die bei Al-Battâni vorkommende Gleichung

$$\text{sinvers}\, t = \text{sinvers}\, t_0 - \frac{\text{sinvers}\, t_0 \sin h}{\sin(90^0 - (\varphi - \delta))}$$

(Cap. XVI) statt $\text{sinvers}\, t_0$ den Wert $\frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \varphi \cos \delta}$ ein, wodurch sie dann allerdings in $\text{sinvers}\, t = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \sin h}{\cos \varphi \cos \delta}$ übergeht. Aber diese Substitution hat Delambre, nicht Al-Battâni ausgeführt, der überhaupt nirgends mit Gleichungen rechnet, sodafs bei ihm von einem Zusammenhang dieser Formeln, oder besser Regeln, untereinander nirgends eine Spur vorhanden ist.

in der obigen Formel ausspricht, ist nämlich ebenso, wie die übrigen mitgeteilten, denen sich noch eine Reihe anderer anschliefst, direkt aus der Fig. 15 (S. 39) abgeleitet worden, ohne irgendwelche Beziehung auf das sphärische Dreieck $PZ\Sigma$. Die Formulierung derselben als eines allgemein giltigen Dreieck-Satzes gehört vielmehr einer viel späteren Zeit an. Fügen wir noch bei, dafs den Arabern damals schon aufser dem Archimedischen Werte $\frac{22}{7}$ für das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser auch noch die beiden indischen Werte $\pi = \sqrt{10}$ und $\pi = \frac{62832}{20000} = \frac{3927}{1250} = 3{,}14160$ bekannt waren[1]), so können wir die gewonnenen Ergebnisse kurz in Folgendem zusammenfassen:

Zu der Zeit, als Al-Battâni sein astronomisches Werk schrieb, waren die Lehren des grofsen Sindhind noch wohlbekannt, aber auch der Almagest des Ptolemäus hatte längst Eingang gefunden. Dem ersteren entnahmen die arabischen Gelehrten die Kenntnis des Sinus und die Werte für das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser, ersetzten aber die wenig genauen indischen Tafeln sehr bald durch die weit bequemeren des Ptolemäus, die sie leicht in Sinustabellen umformten. Zur Lösung der astronomischen Probleme, welche im Grofsen und Ganzen in beiden Werken dieselben waren, bedienten sie sich unter beständiger Verwendung des Sinus teils der indischen, teils der griechischen Regeln, je nachdem ihnen die einen oder anderen vorteilhafter erschienen, wenig Neues, wie z. B. die Cotangententabellen, hinzufügend. Aufserdem erlaubte ihnen die Kenntnis der Projektionsmethode, die sie vielleicht aus dem Analemma und jedenfalls aus den indischen Werken kennen lernten, die in den letzteren gegebenen Regeln geometrisch abzuleiten und durch einige Anwendungen zu vervollständigen, aus denen sich später der zweite Fundamentalsatz der sphärischen Trigonometrie entwickelte.

§ 3. Die Reform der Trigonometrie durch Abû'l Wafâ und seine Zeitgenossen.

War die Thätigkeit der Araber bisher in der Hauptsache nur eine eklektische, so wurde dies anders in der zweiten Hälfte des 10. Jahrhunderts. Es begegnet uns hier zunächst der Astronom Abû'l Wâfâ Muḥammed ibn Muḥammed ibn Jahjâ ibn Ismʿaîl ibn Al-ʿAbbâs Al-Bûzdschâni, der 940 in Bûzdschân in Persien ge-

1) Diese drei Werte finden sich in der Algebra des Muḥammed ibn Mûsâ Al-Chwarizmî angeführt. Dieses noch erhaltene Werk ist von Friedr. Rosen mit einer englischen Übersetzung herausgegeben. London 1831. Vgl. auch die franz. Übersetz. von A. Marre, Nouvelles annales des Mathém. 1846. V. 561.

boren wurde. Er studierte in 'Irâḳ und erwarb sich grofsen wissenschaftlichen Ruhm unter den Arabern, bei denen er als der gewandteste Rechner und als eine glänzende Leuchte galt[1]). Er starb 998 in Bagdad, wo er sein Leben zugebracht hatte. Seine wissenschaftliche Thätigkeit auf rein mathematischem, astronomischem und übersetzerischem Gebiete war eine sehr umfassende, und wie die wenigen noch erhaltenen Schriften beweisen, jedenfalls eine viel originellere, als die seiner Vorgänger. Für uns kommt in der Hauptsache nur sein Almagest[2]) in Betracht, sein Hauptwerk, das für den Astronomen allerdings nur eine Wiederbelebung des gleichnamigen griechischen Werkes ist, aber in Bezug auf trigonometrische Lehren viel Neues enthält. Abû'l Wafâ sagt in seiner Einleitung: „Wir haben in diesem Buche einen Weg eingeschlagen, den keiner unserer Vorgänger gegangen ist; wir haben die bekannten Methoden vermieden, wenn das Eindringen in sie den Studierenden schwierig war, wie z. B. die Methode mit dem Viereck und die Regel der 6 Gröfsen. Wir haben auch mehrere Sätze beigefügt, die die Griechen nicht erwähnten.... Wir haben die Tafeln mit der gröfsten Sorgfalt berechnet. Wenn daher der Leser dieses Buches in den Lösungen verschiedener Fragen Abweichungen begegnet, die sich auf die Sekunden und Terzen der gewöhnlich zugelassenen Werte beziehen, so darf er sich nicht wundern: diese Abweichungen ergaben sich aus der sehr grofsen Annäherung, mit welcher wir die Sinus, die Sehnen und die Tangenten berechneten, die die Elemente des Kalküls bilden." Wir werden sehen, dafs Abû'l Wafâ nicht zuviel versprochen hatte.

Im ersten Teile seines Almagest gibt er wohl zum erstenmale eine systematische mit Beweisen versehene Zusammenstellung der trigonometrischen Sätze. Nach Definition der trigonometrischen Linien: Sehne, Sinus und Sinus versus gibt er die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen durch die einfachsten geometrischen Betrachtungen; sie entsprechen den folgenden Gleichungen:

$$1)\ \sin\alpha = \tfrac{1}{2}\operatorname{crd}(2\alpha);\quad 2)\ \frac{2r - \operatorname{crd}(180^\circ - \alpha)}{\operatorname{crd}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{crd}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{r};\quad 3)\ \frac{\operatorname{crd}\alpha}{\operatorname{crd}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{crd}\left(180^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{r},$$

1) M. Cantor I. 698 ff. und 662; sowie Eilhard Wiedemann, Zur Geschichte Abul Wefas. Zeitschr. f. Math. u. Ph. XXIV. hist.-litt. Abt. 121—122. — 2) Von diesem hat Carra de Vaux leider nur einen Auszug im Journal asiatique Serie 8. XIX. 408—471 veröffentlicht, der aus dem in der Bibl. royale in Paris unter No. 1138 vorhandenen Manuskript stammt. Diesem Auszug ist das im Text Mitgeteilte entnommen.

von denen die zweite unsere Formel $2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$ und die dritte $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ ist; die letztere war neu hinzugekommen. Hierauf gibt er zwei geometrische Ableitungen des Additionstheorems an, die von jener der Griechen abweichen, und erhält dadurch einmal die uns geläufige Form desselben, dann aber auch die kompliziertere Gleichung:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sqrt{\sin^2\alpha - \frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{r^2}} \pm \sqrt{\sin^2\beta - \frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{r^2}}.$$

Dann folgt die Konstruktion der Sinustafel, die von 15 zu 15 Minuten berechnet wird und zwar in ähnlicher Weise wie bei Ptolemäus. Da er sich aber zur Aufgabe setzt, seine Tabelle auf Quarten der Sexagesimalteilung genau zu erhalten, so kann er zur Berechnung von $\sin\frac{1}{2}^0$ von dem Interpolationsverfahren des Griechen keinen Gebrauch machen und ersinnt daher ein weit schärferes[1]), indem er sich des Satzes, dafs die Differenzen der Sinusse mit wachsenden Winkeln abnehmen, bedient, den wir bei Theon kennen lernten. Zunächst leitet er dann durch fortgesetztes Halbieren aus der Kenntnis der Sinusse von 36^0 und von 60^0 die Sinusse von $(\frac{18}{32})^0 = 0{,}56250^0$ und von $(\frac{15}{32})^0 = 0{,}46875^0$ ab. Hiermit erhält er dann $\sin(\frac{12}{32})^0 = \sin\frac{36^0 - 30^0}{16}$ $= \sin 0{,}375^0$, womit also die Näherungswerte für $\sin(0{,}5^0)$ gewonnen sind, deren Argumente sich um $(\frac{3}{32})^0$ unterscheiden. Es sei[2]) nun (Fig. 17) ABO ein Quadrant, arc. $AC = (\frac{12}{32})^0$, arc. $AD = (\frac{15}{32})^0$, arc. $AE = (\frac{18}{32})^0$, dann sind CC', DD', EE' die ihm bekannten Sinusse. Teilt man jetzt die Bögen CD und DE in den Punkten W, X, Y, Z je in drei gleiche Teile, so ist ein solcher Teil $\frac{1}{32}^0$, und folglich arc. AY

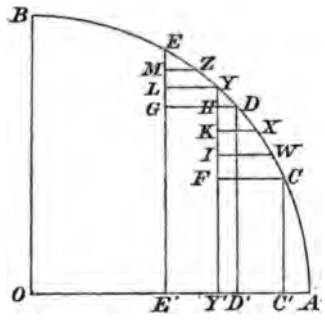


Fig. 17.

1) Dieses Verfahren hat Wöpcke im Journal Asiatique 1860. 5. Serie. XV. 281—320 und im Journal de mathématiques von Liouville 1854. 156 ff. genau untersucht. — 2) Wöpcke teilt die Schlufsformeln ohne Angabe der Ableitung Abû'l Wafâ's mit; a. a. O. 298—299. Cantor hat I. 703 eine rechnerische Ableitung gegeben. Da aber Abû'l Wafâ die Formeln jedenfalls geometrisch konstruierte, so haben wir im Text eine geometrische Ableitung mitgeteilt, welche jener nachgebildet ist, die Mêriem-al-Tchêlêbi in seinem Kommentar zu den astronomischen Tafeln des Ulûg-Beg gibt. Sédillot, Journal Asiatique 5. Serie. II. 1855 und Prolégomènes d'Oloug-Beg, Paris 1853. 76. Auch hat Wöpcke bemerkt, dafs die dort gegebene Methode in der That die von Abû'l Wafâ herstammende ist.

$= (\frac{15}{32})^0 + (\frac{1}{32})^0 = \frac{1}{2}^0$ und YY' der gesuchte Sinus desselben. Projiziert man noch C, W, X senkrecht auf YY' und D, Y, Z auf EE', so ist sowohl $GE' = EE' - DD'$, als auch $FH = DD' - CC'$ nach dem Hilfssatze Theons in drei ungleiche Teile geteilt; und zwar ist $GL = HY = \frac{1}{3}GE$ und $HY < HK < \frac{1}{3}FH$, oder $YY' - DD' > \frac{1}{3}(EE' - DD')$ und $YY' - DD' < \frac{1}{3}(DD' - CC')$. Das gibt aber

$$\sin \tfrac{1}{2}^0 > \sin (\tfrac{15}{32})^0 + \tfrac{1}{3}(\sin (\tfrac{18}{32})^0 - \sin (\tfrac{15}{32})^0),$$

$$\sin \tfrac{1}{2}^0 < \sin (\tfrac{15}{32})^0 + \tfrac{1}{3}(\sin (\tfrac{18}{32})^0 - \sin (\tfrac{12}{32})^0),$$

und das arithmetische Mittel aus diesen beiden Werten gibt $\sin \frac{1}{2}^0 = 0{,}008726535498903$, während der auf 15 Dezimalen genaue Wert 0,008726535498374 ist. Die Differenz beträgt also 0,000000000000529 $= 46^{\text{V}}\, 40^{\text{VI}}\, 50^{\text{VII}}$, und Abû'l Wafâs Wert ist somit nur um 46,7 Quinten zu grofs, sodafs er seine Rechnung mit den Quarten abschliefsen mufste, wenn er ein genaues Resultat erhalten wollte; er hatte somit auch ein ganz richtiges Urteil über die Tragweite und Verwendbarkeit seiner Operation.

Im 6. Kap. seines Almagest definiert er die Schatten, und zwar unterscheidet er, wie Al-Battâni, zwei Schatten: 1. Schatten = umbra versa = Tangente und 2. Schatten = umbra recta = Cotangente. Die Benennung Schatten wurde auch in Zukunft von den Arabern beibehalten. Dabei wird der Schatten als die halbe geometrische Tangente des doppelten Winkels, bezüglich dessen Supplementwinkels aufgefafst. Aufserdem treten hier auch die Sekanten nnd Cosekanten auf, die eine als Durchmesser des ersten, die andere als Durchmesser des zweiten Schattens eingeführt. Alle diese aus dem Schattendreieck entnommenen Linien werden bei ihm, wie der Sinus, als eigentliche trigonometrische Linien zur Rechnung verwendet[1]), weshalb er auch eine eigene Tangententabelle[2]) konstruiert. Den Zusammenhang dieser Funktionen legt er durch die Gleichungen fest:

$\operatorname{tg}\alpha : r = \sin\alpha : \cos\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha : r = \cos\alpha : \sin\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha : \sec\alpha = \sin\alpha : r$;

$\operatorname{tg}\alpha : r = r : \operatorname{ctg}\alpha$; $\sec\alpha = \sqrt{r^2 + \operatorname{tg}^2\alpha}$; $\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{r^2 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$[3]).

---

1) So bestimmt er z. B. zum erstenmale die Rektaszension α aus der Gleichung $\operatorname{tg}\alpha = \cos\varepsilon \operatorname{tg}\lambda$, indem er α in seiner Tangententabelle aufschlägt. — 2) Wie die Sinustafeln, so fehlen im Manuscripte leider auch die Tangententafeln, sie waren aber von 15 zu 15 Minuten berechnet und umfafsten 4 Spalten: die erste und die zweite enthielten die Tangenten resp. die Cotangenten und zwar für den Radius 1, in der dritten standen sie für $r = 60^p$, während die vierte die ersten Differenzen enthielt. — 3) Diese Formeln finden sich also hier zum erstenmale, nicht etwa erst bei Bradwardin (1325), wie M. Curtze, Zeitschr.

Aber Abû'l Wafâ geht in seinen Neuerungen noch einen Schritt weiter, indem er sagt: „Also ist es klar, dafs, wenn man den Radius gleich 1 setzt, das Verhältnis des Sinus eines Bogens zu dem Sinus seines Complementes der erste Schatten, und das Verhältnis des Sinus des Complementes zu dem Sinus des Bogens der zweite Schatten ist.“ Diese Bemerkung kann nicht genug hervorgehoben werden, denn sie versetzt Abû'l Wafâ weit über Mittelalter und Renaissance hinaus bis in die moderne Zeit, und es ist sehr merkwürdig, dafs dieser Gedanke $r = 1$ zu setzen, trotzdem er hier auf das Klarste ausgesprochen wurde, wieder völlig in Vergessenheit geriet, indem bis ins 18. Jahrhundert herein der Radius beständig mitgeschleppt wurde.

Mit dieser Einführung der 6 trigonometrischen Funktionen durch Abû'l Wafâ war die Trigonometrie des ebenen rechtwinkligen Dreieckes mit einem Schlage so vervollständigt, dafs sie ein ganz modernes Gepräge bekam. Aber auch in der sphärischen Trigonometrie ging er bahnbrechend vor, und namentlich ist es bemerkenswert, dafs er sich in der „Regel der vier Gröfsen“, die wir im Keime schon bei Thâbit antrafen, sowie in seinem „Tangentensatze“, eine neue Basis der sphärischen Trigonometrie schuf. Als Quelle für beide Sätze haben wir schon früher die Sphärik des Menelaus nachgewiesen (S. 17). Während wir aber vermuten, dafs das erste Theorem bereits im Besitze Thâbits war, ist das zweite unstreitig Abû'l Wafâs Eigentum[1]). Für die beiden bei C und C' rechtwinkligen Dreiecke (Fig. 18) lauten die fundamentalen Theoreme nach Abû'l Wafâs Angabe (I) $\sin BC : \sin B'C' = \sin BA : \sin B'A$[2]) und (II) $\operatorname{tg} BC : \operatorname{tg} B'C' = \sin AC : \sin AC'$[3]), woraus er noch die III. Fundamentalgleichung des rechtwinkligen Dreieckes (S. 25) folgert. Als vierten Hauptsatz gibt er den Sinussatz für ein beliebiges sphärisches Dreieck an. Ob der Satz von Abû'l Wafâ zuerst aufgestellt wurde, ist schwer zu entscheiden, da mit ihm hierin seine Zeitgenossen Abû Naṣr und Al-Chodschendi konkurrieren. Jedenfalls gab er einen direkten Beweis desselben ohne

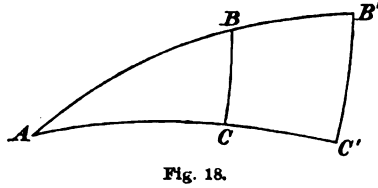


Fig. 18.

f. Math. und Phys. XX. 224 angibt; übrigens hat sie schon Delambre bei Abû'l Wafâ nachgewiesen. Hist. de l'Astr. du moyen âge 185.

1) Naṣîr Eddîn Ṭûsi, Traité du quadrilatère p. 163 bestätigt dies. — 2) Almagest von Abû'l Wafâ lib. II. Cap. 3. — 3) Ebenda lib. I. Cap. 4. Dieses Theorem heifst bei den Arabern allgemein das „Schattentheorem“.

das Dreieck in zwei rechtwinklige zu zerspalten[1]). Übrigens besteht kein Zweifel, daſs zuerst der Satz für das rechtwinklige Dreieck entstand, den wir schon implizite bei Ptolemäus (S. 24) und bei den Indern fanden, und für welchen Naṣîr Eddîn in seinem Werke über das Viereck eine ganze Reihe von Beweisen mitteilt. Dieses Theorem erhielt dann später den Namen „Ersatztheorem"[2]), weil es, wie die unmittelbar daraus folgende Regel der vier Gröſsen, den Satz des Menelaus zu vertreten imstande ist.

Mit den angeführten vier Sätzen ist nun Abû'l Wafâ in der Lage, alle seine astronomischen Probleme zu lösen, ohne auf die Regel der 6 Gröſsen rekurrieren zu müssen, die wohl ein sehr allgemeines, doch ein schwerfälliges Mittel zur Gewinnung der nötigen Formeln darstellt.

Abû'l Wafâ hatte seine ausgedehnte von den glänzendsten Erfolgen gekrönte Gelehrtenthätigkeit bereits unter einem Herrscher ausgeübt, der nicht mehr dem Stamm der Abbasiden angehörte, denn schon im Jahre 945 hatte sich unter den heftigsten Kämpfen in Bagdad ein Regierungswechsel vollzogen, indem in der Ausübung der höchsten Gewalt an die Stelle der früheren Herrscher die 'Bujiden getreten waren. Dem Ansturm kriegerischer Schaaren unter dem Befehle eines Abkömmlings des Abû Schudschâ 'Bujeh war nämlich Bagdad und damit das altersschwache Khalifat erlegen; allerdings fristete dasselbe noch ein Scheindasein fort, doch der Khalif sah sich gezwungen dem 'Bujiden Mu'izz Eddaula die gesamte weltliche Macht zu übertragen und ihm den Sultanstitel zu verleihen.

Aber trotz dieser politischen Ereignisse gediehen die Wissenschaften, wie in der Glanzzeit der Abbasiden, und fanden von Seiten der neuen Herrscher eine ebenso kräftige Unterstützung. Scharaf Eddaula (985—989) gründete im Garten seines Palastes eine neue Sternwarte, und dem Kollegium von Gelehrten[3]), die derselben vorstanden, gehörte eben Abû'l Wafa an, dessen von uns geschilderte trigonometrische Verdienste nur einen kleinen Teil seiner historischen Bedeutung für Mathematik und Astronomie ausmachen.

---

1) Diesen teilt Carra de Vaux a. a. O. mit. Er wird aus der Regel der vier Gröſsen abgeleitet, welche zweimal auf eine Figur angewendet wird, die durch Ergänzung der Dreiecksseiten zu Quadranten entsteht. — 2) Nach einer Bemerkung Naṣîr-Eddîns (Traité etc. p. 140 und 163) soll Abû Naṣr der erste gewesen sein, der einem Ausdrucke Thâbits folgend, den Sinussatz in dieser Weise bezeichnete; Al-Chodschendi aber nannte ihn in einem Kommentar zum Almagest „Die Regel der Astronomie", während andere ihn den Satz nannten, der das vollständige Viereck überflüssig macht. (Ebenda 162.) — 3) Vgl. Hankel 242 ff. und Cantor I. 698.

Übrigens befand sich aufser ihm in jenem Kollegium noch eine ganze Reihe hervorragender Gelehrter, welche die Schule von Bagdad zu einer neuen Blüte brachten, die erst gegen die Mitte des 11. Jahrhunderts allmählich herabsank. Leider haben wir über den damaligen Stand unserer Wissenschaften, aufser dem oben Mitgeteilten, nur wenige unzusammenhängende Nachrichten, die wir einigen Bemerkungen Naṣîr Eddîn's in seinem schon wiederholt benützten Buche über das Viereck entnehmen. So haben in der zweiten Hälfte des 10. Jahrhunderts der schon erwähnte Emir Abû Naṣr Mansûr ben 'Ali ben 'Irak (ca. 960—1020) und Abû Mahmûd Ḥâmid ibn Al-Chaḍar Al-Chodschendi (um 992) gelebt[1]), welche beide Abû'l Wa'fâ die Priorität der Erfindung des Sinussatzes streitig machen. Von dem zweiten dieser Gelehrten teilt Naṣîr Eddîn einen[2]), von ersterem vier Beweise[3]) für den Sinussatz der sphärischen Trigonometrie mit. Dieselben waren entweder in dem von ihm verfafsten „Königlichen Almagest" oder in seinem Kommentar zum Buche des Menelaus enthalten[4]). Wir müssen uns, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, versagen auf diese Beweise näher einzugehen, und bemerken nur, dafs sich vier derselben auf ein rechtwinkliges und einer von Abû Naṣr auf das allgemeine sphärische Dreieck beziehen, und dafs sie alle aus der Betrachtung des zum Dreieck gehörigen Dreikantes fliefsen, dessen Scheitel im Kugelmittelpunkt liegt. Die Regel der vier Gröfsen wurde dann im Gegensatz zu Abû'l Wafâ[5]) aus dem Sinussatz abgeleitet.

Abû Naṣr war der Lehrer des berühmten Abû-Raiḥan (oder Riḥân) Muḥammed ben Aḥmed Al-Bîrûnî, der von 973—1038 oder 1039 lebte und in Bairûn, der Vorstadt von Chwarizm am Südufer des kaspischen Meeres von arabischen Eltern geboren war[6]).

---

1) Schreibweise dieser Namen und Angabe der Lebenszeit verdanke ich einer gütigen Privatmitteilung des Herrn Suter. — 2) A. a. O. 151. — 3) A. a. O. 141—148 und 157. — 4) Die Auffindung dieser Schriften würde für die Geschichte der Trigonometrie sicher von grofsem Werte sein, denn nach den überlieferten Proben scheint sich ihr Verfasser mit ebensoviel Geschick als Vorliebe mit dieser Hilfswissenschaft der Astronomie beschäftigt zu haben; dafür spricht auch ein gegen Ptolemäus (S. 23) sehr vereinfachtes Verfahren, um aus der Summe zweier Bögen und dem Verhältnis ihrer Sinusse die Bögen selbst zu finden, das uns Naṣîr Eddîn von diesem Gelehrten mitteilt. — Ferner sei noch bemerkt, dafs nach Angabe von E. Sachau: „Chronologie orientalischer Völker" von Albîrûnî, Einleitung p. XXXIV Abû Naṣr mehrere Werke im Namen Albîrûnîs schrieb, darunter „Theoremata duo e trigonometria sphaerica", welches in der Leydener Bibliothek Cat. III. No. 1007 handschriftlich vorhanden ist. — 5) Übrigens teilt Naṣîr-Eddîn auch einen direkten Beweis Abû'l Wafâs mit a. a. O. 148—149. — 6) E. Sachau a. a. O. p. XVII—XVIII und p. XXXIII.

Im Mannesalter kam er an den Hof des kunstsinnigen Sultans Maḥmûd, des Eroberers von Indien, der in Gazna residierte und an seinen glänzenden Hof neben berühmten Dichtern und Philosophen auch die Vertreter der exakten Wissenschaften zog. Dort scheint es ihm nicht an Protektion gefehlt zu haben, die er für seine ausgebreiteten Studien und namentlich für seine astronomischen Arbeiten nötig hatte. Er machte grofse Reisen in Indien, dessen Sprache er von Jugend auf sprach und verfafste das von uns schon mehrfach benutzte Werk über dieses Land, ein Werk, welches unbestritten zu den hervorragendsten Erscheinungen der arabischen Litteratur gehört. Dasselbe gibt nicht nur Zeugnis von dem Wissen des Autors, sondern von einer Tiefe der Kritik und einer Auffassung der Verhältnisse, die einem modernen Schriftsteller alle Ehre machen würde.

Zu den von Al-Bîrûnî am meisten bevorzugten Wissenschaften gehörten aber Mathematik und Astronomie. Aufser einem Werke über die Chronologie existiert von ihm noch ein ausführliches Werk über die zur Konstruktion von Astrolabien[1]) dienenden Methoden (stereographische Projektion) und eine Schrift über Trigonometrie mit dem Titel: „Die Schlüssel zur Erkenntnis der sphärischen und anderer Figuren.“ Naṣîr Eddîn, der diese Schrift anführt[2]), sagt, Al-Bîrûnî stelle darin die verschiedenen Gesichtspunkte auf, von denen aus man das sogenannte „Ersatztheorem“ behandelt, macht uns mit einem Beweise Al-Bîrûnîs für den Sinussatz bekannt und bemerkt, dafs derselbe bei Aufstellung seiner Regeln wie Abû'l Wafâ den Radius gleich 1 gesetzt habe[3]).

Dies sind die spärlichen Nachrichten, welche wir aus jener Zeit beizubringen vermögen, doch läfst sich schon aus ihnen entnehmen, dafs die Trigonometrie der Araber und Perser damals ihre griechischen Vorbilder bereits weit überflügelt hatte und anfing zu einer selbständigen Wissenschaft zu werden, wie überhaupt mit dem Vordringen des persischen Elementes mehr ein Aufschwung der reinen Mathematik, als der Astronomie zu beobachten ist.

§ 4. Ibn Jûnos und die Ḥâkimitischen Tafeln.

Als Asien am Ende des 10. Jahrhunderts infolge von Familienstreitigkeiten, die schon unter den zuletzt genannten Herrschern ausbrachen, der Schauplatz unaufhörlicher blutiger Kämpfe geworden war, rissen sich verschiedene Provinzen vom Hauptreiche los und bildeten eigene selbständige Staaten. So gründete das Geschlecht

1) Bodleyanische Handschriftensammlung. Marsh 701. — 2) A. a. O. 140. — 3) Naṣîr Eddîn, Traité du quadrilatère 165.

der Fatimiden in Ägypten eine eigene Herrschaft von fast 200jähriger Dauer und machte allmählich die Hauptstadt Kairo zu einem neuen Mittelpunkte wissenschaftlicher Bestrebungen. Al-'Aziz (975—996) und sein Sohn Al-Ḥâkim (996—1011) wandten ihre Gunst mit besonderer Vorliebe der Astronomie zu, und der letztere gründete eine umfassende Büchersammlung und liefs auf dem Berge Mokkatam, östlich von Kairo, eine Sternwarte errichten, welche er mit reichlichen Mitteln ausstattete. An ihr wirkte Abû'l Ḥasan 'Ali ibn Abi Sa'id 'Abderrahmân ibn Aḥmed ibn Jûnos († 1008) und arbeitete im Auftrage seines Gebieters astronomische Tafeln aus (1007), welche er Al-Ḥâkim zu Ehren die hâkimitischen Tafeln nannte[1]). In diesen war das „Fazit der ganzen zweihundertjährigen Entwicklung der arabischen Astronomie gezogen", und „alle späteren Astronomen des Orients gehen von den Tafeln des Ibn Jûnos als einer unfehlbaren Autorität aus"[2]).

Uns interessieren nur seine trigonometrischen Leistungen, die wir in Folgendem kurz zusammenfassen. Zunächst bemerken wir, dafs seine Berechnung der Sinustafeln keinen Fortschritt gegen Abû'l Wafâ aufweisen und dafs er seine für $r = 60^p$ von 10 zu 10 Minuten berechneten Cotangententabellen nicht, wie letzterer, direkt für seine Berechnungen verwertet[3]). Er scheint also ihre Tragweite nicht recht durchschaut zu haben. Ähnlich verhält es sich mit dem 5. Theorem zur Berechnung rechtwinklig sphärischer Dreiecke (S. 25), das er ebenfalls nicht erkannte, obwohl er zu wiederholtenmalen sehr nahe daran war, es zu entdecken[4]). Statt desselben verwendet er öfters die beiden komplizierten Theoreme: $\cos A = \frac{\cos a \sin b}{\sin c}$ und $\cos c = \frac{\cos A \cos b}{\sin B}$[5]).

---

1) Bisher ist leider nur ein Teil (Cap. III—V, VI) von den 81 Kapiteln dieses Werkes veröffentlicht und von Cousin ins Französische übersetzt. (Notices et extraits de la bibliothèque nationale VII. 16—240); die späteren Kapitel hat Sédillot für Delambre übersetzt, der sie in seiner Histoire de l'Astr. du moyen âge 76—156 benützte, aber leider ist die Übersetzung nicht im Drucke erschienen, sodafs wir in unseren Mitteilungen ganz auf Delambre angewiesen sind. — 2) Hankel 244 und 245. — 3) So berechnet er z. B. die Rektaszension α, wie die Inder (S. 39), aus der Formel $\sin\alpha = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} \cdot \frac{\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}$, statt die Tangenten zu benutzen. (Vgl. dagegen S. 57.) Solche Beispiele führt Delambre noch viele an. Abû'l Wafâ war hierin entschieden weiter vorgeschritten. — 4) Vgl. Delambre a. a. O. 103—104, 106. — 5) Das erstere derselben ergibt sich durch Kombination unserer Theoreme I und V, das letztere durch Verbindung von III mit V. — Es dauerte noch mehr als ein Jahrhundert, bis der Westaraber Dschâbir ibn Aflâḥ das V. Theorem selbst aufstellte.

Während Ibn Jûnos in diesen Dingen seinen Zeitgenossen Abû'l Wafâ nicht übertrifft, ja kaum erreicht, scheint er in der Handhabung der Projektionsmethode eine besondere Fertigkeit besessen zu haben. Delambre führt eine Menge der von ihm ohne Ableitung angegebenen Regeln an und glaubt, aus der Gestalt derselben unbedingt darauf schliefsen zu müssen, dafs er eine gewisse Formelschreibung besessen habe, die ihm die algebraische Rechnung gestattete. Doch lassen sich alle diese Formeln völlig ungezwungen mit jener Orthogonalprojektion ableiten, ja die Gestalt, in der sie gegeben werden, weist sogar unmittelbar auf diesen Ursprung hin[1]).

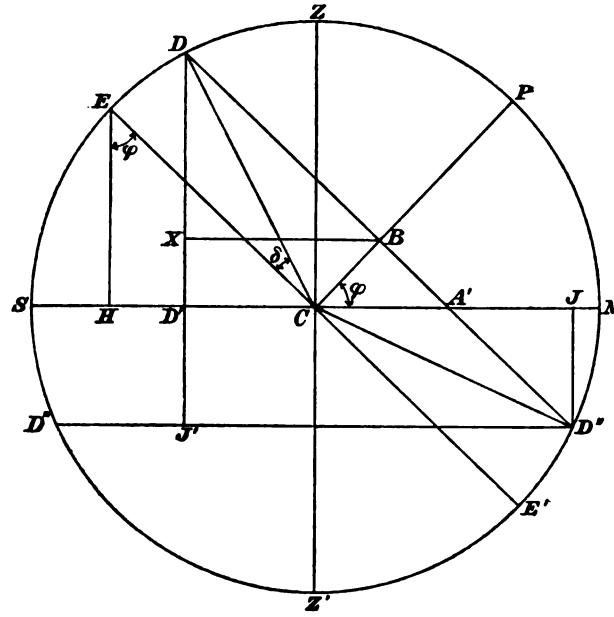


Fig. 19.

Wir wollen hier nur auf eine Formel hinweisen, die später im Abendlande zur Schöpfung einer Methode führte, welche die noch fehlenden Logarithmen mit Glück zu ersetzen vermochte. Es ist dies die Formel[2])

$$\cos\varphi \cos\delta = \tfrac{1}{2}\{\cos(\varphi - \delta) + \cos(\varphi + \delta)\}.$$

Um diese nachzuweisen sei (Fig. 19) die Orthogonalprojektion von (Fig. 15) S. 39 auf die Meridianebene, δ bedeute wie früher

1) In unseren „Beiträgen" (24—26) haben wir an dem schwierigsten Beispiele arabischer Astronomie, aus dessen Lösung Delambre (a. a. O. 128) auf die Bekanntschaft mit algebraischen Rechnungsmethoden unbedingt schliefsen zu müssen glaubte, nachgewiesen, dafs Ibn Jûnos sich nur der Projektionsmethode bediente. — 2) Delambre a. a. O. 108.

die Deklination und φ die Polhöhe, dann ist $\sphericalangle DCZ = \varphi - \delta$, also $DD' = \cos(\varphi - \delta)$ und $\sphericalangle D''CZ' = \varphi + \delta$, also $D''J = \cos(\varphi + \delta)$. Zieht man noch $D''D''' \parallel NS$, welche die Verlängerung von DD' in J' schneidet, so ist $DJ' = \cos(\varphi - \delta) + \cos(\varphi + \delta)$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke DBX und ECH folgt aber $BD : DX = EC : EH$, oder für $EC = 1$, $BD \cdot EH = DX$. Es ist aber $BD = \cos\delta$, $EH = \cos\varphi$ und $DX = \frac{1}{2}DJ'$, somit geht diese letztere Gleichung unmittelbar in die abzuleitende über[1]).

Trotz dieser umfangreichen Verwertung der Orthogonalprojektion ist Ibn-Jûnos der zweite Hauptsatz der sphärischen Trigonometrie ebenso wie seinen Vorgängern entgangen, während er sich ihm unmittelbar hätte darbieten müssen[2]), wenn er überhaupt an die Formulierung eines allgemeinen Theorems gedacht hätte. Dagegen kennt er, wie Abû'l Wafâ, den Sinussatz und wendet ihn verschiedenemale an[3]). Seine Lösung der Aufgabe, das Azimut und die Höhe eines Sternes aus Stundenwinkel, Deklination und Polhöhe zu bestimmen, ist sogar wesentlich einfacher, als die, welche man heute gewöhnlich gibt[4]).

Zu den Gelehrten, welche zeitweise zu Kairo am Hofe Al-Ḥâkims lebten, ist noch Alhazen, oder wie er eigentlich heifst, Abû 'Ali Al-Ḥasan ibn Al-Ḥasan ibn Al-Haiṭam († 1038 oder 1039) zu nennen. Er war in Al-Baṣra geboren und wurde nach Kairo berufen, da er sich geäufsert hatte, er sei imstande, die Strömung des Nil so zu regulieren, dafs die Überschwemmungen stets gleichmäfsig stattfinden würden. Da es ihm aber nicht gelang, sein Versprechen einzulösen, so mufste er sich, um dem Zorne Al-Ḥâkims zu entgehen, verbergen und lebte von da an in gröfster Zurückgezogenheit, nur mit der Abfassung mathematischer, astronomischer und medizinischer Werke beschäftigt. Fr. Wöpcke fand zwei Verzeichnisse[5]) seiner Werke auf, von denen das eine 25, das andere gar 92 Abhandlungen mathematischen Inhalts aufzählt, wozu noch 30 medizinische Schriften kommen. Unter ersteren befinden sich auch mehrere, die für die Geschichte der Trigonometrie von Wichtigkeit wären, aber leider teils verloren, teils nur handschriftlich vorhanden und uns daher unzugänglich sind[6]). Das christliche

---

1) Auch das Abendland hat diese Art der Ableitung beibehalten. — 2) Ḥâkimitische Tafeln Cap. XIV, XX, XLVIII. — 3) Delambre a. a. O. 112; Ḥâk. Tafeln Cap. XV. — 4) Ebenda Cap. XX. Delambre 117—118. — 5) L'Algebra d'Omar Alchaiyami. Paris 1851. in 8°. 73—76. Note ***). — 6) Auch eine Abhandlung über die Quadratur des Kreises existiert noch von ihm (Bulletino di bibl. e di st. IV. 41 ff.), deren Veröffentlichung sehr wünschenswert wäre, da sie die erste nach Archimed ist; vgl. Cantor I. 744.

Mittelalter scheint nur seine Optik, die allerdings Jahrhunderte hindurch das beste Buch nach dieser Richtung war, sowie seine Schrift über die Dämmerung gekannt zu haben, da sich von seinen anderen Werken keine lateinischen Übersetzungen finden.

§ 5. Naṣîr-Eddîn-Ṭûsi und sein Werk über das vollständige Viereck.

Wenden wir uns von Ägypten, wo uns nur vorübergehend Ibn-Jûnos fesseln konnte, wieder nach Bagdad zurück, das wir zu einer Zeit verliefsen, als die mathematischen Wissenschaften, trotz der kriegerischen Wirren, noch auf bedeutender Höhe standen und in Abû'l Wafâ ihren hervorragendsten Vertreter hatten. Diese Blüte unserer Wissenschaft dauerte noch ungefähr bis über die Mitte des 11. Jahrhunderts fort, ging dann aber rapid abwärts, und erst als 1258 Bagdad unter dem Andrange der Mongolen gefallen war, und das Khalifat sein Ende gefunden hatte, begann unter den Fürsten jenes Volkes eine Nachblüte der Astronomie, die sich an einige Männer knüpft, mit deren Thätigkeit wir uns im Folgenden noch beschäftigen müssen.

Der Eroberer Bagdads Hûlâgû, ein Enkel Dschingischans, hatte in seiner Begleitung einen ganz hervorragenden Mann, den Perser Abû Dscha'fer Muḥammed ibn Ḥasan al-Ṭûsi mit dem Beinamen Naṣîr Eddîn, d. h. Verteidiger der Religion, welcher 1201 in Tûs geboren war. Auf sein Betreiben wurde schon ein Jahr nach der Einnahme Bagdads eine neue Sternwarte in Marâga[1]) bei Tauris im Nordwesten von Persien erbaut, auf das kostbarste ausgestattet und an dieselbe eine grofse Anzahl von Astronomen berufen. Daselbst entstanden die Ilchânischen Tafeln, so benannt nach den mongolischen Herrschern, den Grofschanen, ein Werk, dem Naṣîr Eddîn seine Berühmtheit verdankte und das sogar bis China gelangt sein soll[2]). Man kann es als eine Neubearbeitung der Ḥâkimitischen Tafeln ansehen. Aufser diesem hat aber Naṣîr Eddîn bis zu seinem 1274 erfolgten Tode noch eine Menge anderer Werke über die verschiedensten Wissenschaftsgebiete geschrieben[3]), von

1) Jourdain, Mémoire sur l'observatoire de Méragah et sur quelques instruments employés pour y observer: suivi d'une notice sur Nassyr-Eddin. Paris 1810. Ein Auszug bei Wurm. Zach's monatliche Correspondenz XXIII. 64—78 und 341—361. Vgl. auch Reinaud, Géographie d'Aboulféda. Paris 1848. 4°. I. p. 139 der Einleitung. — 2) Ebenda p. 140. — 3) Auch beschäftigte er sich mit Redaktion und Verbesserung verschiedener von den Griechen und von seinen arabischen Vorgängern verfafsten Schriften. Man findet solche aufgezählt bei H. Suter „Über zwei arabisch-mathematische Manuscripte der Ber-

denen für uns jenes schon öfter benützte Buch über das vollständige Viereck, das den Titel Schakl al-Kaṭṭâ führt, von äufserster Wichtigkeit ist[1]). Dieses Werk ist das erste in der uns bekannten Litteratur, welches die ebene und sphärische Trigonometrie nicht mehr als blofses Hilfsmittel für die Astronomie, sondern um ihrer selbt Willen in gröfster Vollständigkeit behandelt. Als Fundament dient Naṣîr Eddîn für die Kugel das vollständige Viereck, oder der Satz des Menelaus, den er auch für die Ebene behandelt[2]). Bei ihm findet sich endlich die Erkenntnis, dafs die vier in der Figur des Transversalensatzes (S. 16) enthaltenen Dreiecke zu ebensovielen Hauptgleichungen führen, von denen jede in 18 verschiedenen Formen geschrieben werden kann, je nachdem man die Verhältnisse mit einem anderen Stücke beginnt[3]). Die eigentliche Trigonometrie beginnt er mit dem ebenen rechtwinkligen Dreieck, stellt aber dann auch den Sinussatz für das schiefwinklige Dreieck direkt auf[4]), in-

---

liner kgl. Bibliothek." Bibliotheca math. 1898. 73—78, wo sich auch interessante Notizen über eine Kreismessung der Araber finden.

1) Vgl. S. 47 Anm. 2. Eine Besprechung desselben gab Suter, Bibliotheca mathematica 1893. 1—8. Eingehend haben wir uns über dasselbe verbreitet in der schon öfter angeführten Abhandlung: Nassîr Eddîn Tûsi und Regiomontan. Halle 1897. — 2) Wie er sagt, schliefst er sich bei Behandlung der verschiedenen möglichen Fälle hauptsächlich an Hussam Uddîn 'Ali ben Fallulâh, den Salar an, der auch eine Abhandlung über das Viereck geschrieben hat, fügt aber Eigenes hinzu. — 3) Bezeichnet man in der Fig. 4. S. 16 die Strecken AG, AE, DG, DZ, BZ, BE der Reihe nach mit a, b, c, d, e, f, so folgt z. B. aus der Gleichung $a \cdot d \cdot f = b \cdot c \cdot e$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$ und $\frac{a}{b} = \frac{c}{f} \cdot \frac{e}{d}$, also beginnen zwei Gleichungen mit dem Verhältnis $\frac{a}{b}$, ebenso kann man 2 weitere mit $\frac{a}{c}$ und wieder 2 mit $\frac{a}{e}$, also im Ganzen 6 mit a beginnen lassen. Da es ferner 6 gibt, die mit d und 6, die mit f beginnen, so lassen sich im Ganzen 18 zusammengesetzte Proportionen aus einem Dreieck bilden. Die Richtigkeit dieser Gleichungen wird für alle möglichen verschiedenen Formen des vollständigen Viereckes mit der Ähnlichkeit nachgewiesen. — 4) Naṣîr Eddîn gibt zwei Beweise für ihn an, von denen wir den einen hier kurz skizzieren, weil er sich genau in derselben Weise später wieder bei Regiomontan findet, dem er bisher zugeschrieben wurde (Cantor II. 244). Man beschreibt in Fig. 20 mit $CE = BH = 60^p$ als Radius Kreisbögen aus C und B und fällt von den Schnittpunkten D und T derselben mit den verlängerten Seiten CA und AB des $\triangle ABC$, die Senkrechten DF und TK auf CB; dann ist $DF = \sin C$, $TK = \sin B$, und wenn

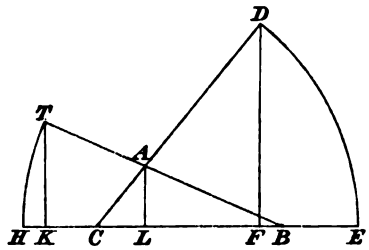


Fig. 20.

dem er ihn sowohl in der noch heute gebräuchlichen Form, als auch mit Benützung der Sehnen statt der Sinusse ausspricht. Es ist dies die erste Stelle, an der wir einer expliziten Formulierung des Sinussatzes für das ebene Dreieck begegnen. Andere Sätze für das schiefwinklige Dreieck werden nicht formuliert, sondern die einzelnen Dreiecksfälle ähnlich wie bei den Griechen behandelt.

Die Behandlung der sphärischen Trigonometrie leitet Naṣîr Eddîn dadurch ein, daſs er den Transversalensatz für alle möglichen Fälle unter Zugrundelegung der Sinusse beweist, dann gibt er eine eingehende Diskussion aller wesentlich verschiedenen Gestalten sphärischer Dreiecke, indem er die beiden Einteilungsprinzipe nach der Gröſse der Seiten und der Winkel richtig unterscheidet. In beiden Fällen ergeben sich 10 verschiedene Grundtypen, welche durch Figuren erläutert und schlieſslich in einer Tafel vereinigt werden[1]). Hierauf wendet er sich zur Entwickelung der Hilfsmittel, welche zur Berechnung der Dreiecke dienen. Dabei nennt er die Methode, die Auflösung der Dreiecksaufgaben mittelst des Satzes von Menelaus zu bewerkstelligen, die „Methode der Alten" und sagt weiter[2]): „Die Modernen aber haben, sei es aus Scheu vor der Untersuchung der verschiedenen Verhältnisse, sei es um Weitläufigkeiten zu vermeiden, welche der Gebrauch der zusammengesetzten Verhältnisse in der Praxis nach sich zieht, andere Sätze ausgedacht, welche an Stelle des Viereckes treten und denselben Nutzen, wie dieses bieten..." Dabei hat er das „Ersatz- und das Schattentheorem" im Auge, die wir schon kennen lernten (S. 58). Unter den 8 Beweisen, die er für das erstere mitteilt, ist einer, der von ihm selbst herrührt und, wie alle eigenen Beweise, mit Benutzung des Viereckes in der Weise geführt wird, wie wir dies schon S. 24 andeuteten. Als Korollare ergeben sich in derselben Weise abgeleitet die Fundamentalgleichungen III. $\cos c = \cos a \cos b$[3]) und V. $\cos A = \cos a \sin B$, von denen Ptolemäus nur die erstere kannte. Aber auch die letztere Relation war schon vor Naṣîr Eddîn den Westarabern bekannt[4]). Zu diesen beiden sehr verwendbaren Sätzen fügt er noch als drittes Korollar die

---

$AL \perp BC$ gezogen wird, so ist $AB : AL = BT : TK = 60^p : \sin B$ und $AL : AC = DF : DC = \sin C : 60^p$; woraus durch Multiplikation $AB : AC = \sin C : \sin B$ folgt.

1) A. a. O. 136. — 2) A. a. O. 140. — 3) Hierfür teilt er übrigens noch Beweise des Abû'l Fazl Ennirizî und des Abû Dschafar Al-Châzim (ca. 920—980, nach einer gütigen Mitteilung von H. Suter), die den Kommentaren dieser Gelehrten zum Almagest entnommen sind, mit. — 4) Siehe S. 62. Anmerk. 5.

Formel $\cos A : \cos a = \sin b : \sin c$ hinzu, die wir schon bei Ibn Jûnos fanden (S. 62), bemerkt aber richtig, dafs sie für die Praxis wenig Wert habe, da sie zur Berechnung eines Stückes die Kenntnis dreier anderer verlangt.

Indem er sich zum Schattentheorem wendet, definiert er die Tangenten und Cotangenten, wie Abû'l Wafâ am Kreise und leitet die sie verbindenden Gleichungen ab (siehe S. 57). Hierauf gibt er die Fundamentalrelation II (S. 25) in dem der Gleichung $\sin b : \sin 90^0 = \operatorname{tg} a : \operatorname{tg} A$ entsprechenden Wortlaut und teilt für sie und die allgemeine Relation (S. 58) zusammen 6 Beweise mit, von denen der letzte wieder in der S. 24 angemerkten Weise mittelst des Viereckes erhalten wird, während die anderen aus der Betrachtung des Dreikantes hervorgehen, mit dem die Araber vorzüglich umzugehen verstanden[1]).

Da sich das Schattentheorem nicht wie das Ersatztheorem direkt auf schiefwinklige Dreiecke ausdehnen läfst, wie Naṣîr Eddîn richtig bemerkt, so werden durch zweimalige Anwendung desselben auf die beiden rechtwinkligen Dreiecke, in welche sich ein schiefwinkliges durch einen senkrechten Bogen zerlegen läfst (Fig. 21), die beiden Gleichungen aufgestellt:

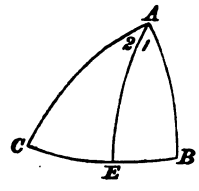


Fig. 21.

$$\operatorname{tg} B : \operatorname{tg} C = \sin CE : \sin BE$$

und

$$\operatorname{tg} A_1 : \operatorname{tg} A_2 = \operatorname{tg} BE : \operatorname{tg} CE.$$

Aus dem Hauptsatze des Schattentheorems ergeben sich dann wieder mehrere Folgerungen, von denen wir die IV. Fundamentalformel $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos A$, sowie ganz besonders das erstmalige Auftreten der VI. Relation $\cos c = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B$ hervorheben, da dieselbe bis in die neueste Zeit stets Vieta (1540—1603) zugeschrieben wurde. Auch ihr Beweis wird aus dem voll-

---

1) Wir geben hier einen dieser Beweise (p. 171 ff.), um die Methode zu kennzeichnen, die in solchen Fällen angewendet wurde. ABC und AED sind (in Fig. c) bei C, resp. E rechtwinklige Dreiecke, die $\sphericalangle A$ gemeinsam haben. Verbindet man den Kugelmittelpunkt F mit A, B, C, D, E, fällt CH und $EL \perp AF$ und $CT \perp$ Ebene $DACF$, $EK \perp$ Ebene $EABF$, so treffen diese Linien FB und FD bezüglich in T und K, ferner folgt leicht, dafs $EL \parallel TH$ und $KL \parallel CH$ ist, so dafs $\sphericalangle CHT = \sphericalangle ELK$ ist, und die rechtwinkligen Dreiecke CHT und ELK ähnlich sind. Hieraus folgt dann: $CH : LE = CT : EK$, d. h. $\sin b : \sin b' = \operatorname{tg} a : \operatorname{tg} a'$. Ist $b' = 90^0$, so wird $a' = \sphericalangle A$ und man hat $\sin b : \sin 90^0 = \operatorname{tg} a : \operatorname{tg} A$.

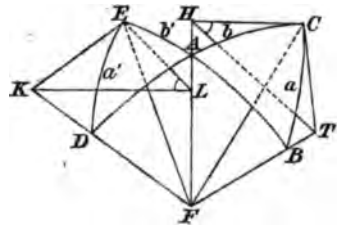


Fig. c.

ständigen Viereck mit Hilfe des Schattentheorems abgeleitet (a. a. O. p. 141). Endlich schliefst sich hieran die „weniger Verwendung findende" Relation $\operatorname{ctg} A : \operatorname{tg} b = \cos c : \sin a$, sowie eine allgemeine Betrachtung über die Brauchbarkeit der einzelnen Theoreme, worin er sich hauptsächlich gegen die Ansicht „hervorragender Gelehrter" wendet, als seien die Tangententafeln weniger verwendbar, als die Sinustabellen[1]).

An die Aufstellung der allgemeinen Formeln schliefst sich, wie in unseren modernen Lehrbüchern der Trigonometrie, die Aufzählung und Berechnung der 6 Fälle, welche bei Berechnung der rechtwinkligen Dreiecke vorkommen können[2]). Dabei behandelt er diese Fälle getrennt, sowohl mit dem „Ergänzungstheorem", als auch mit der „Tangentenregel", fügt aber bei, dafs man sich nicht etwa „sklavisch" an diese Regeln binden müsse, sondern jeder, der in die Sache eingedrungen sei, werde stets leicht den einfachsten Weg finden[3]).

Nun folgt eine systematische Behandlung der schiefwinkligen Dreiecke[4]), wobei folgende 6 Fälle unterschieden werden: Gegeben: I. zwei Seiten und ein Winkel und zwar a) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, b) zwei Seiten und ein Gegenwinkel; II. zwei Winkel und eine Seite und zwar a) zwei Winkel und die anliegende Seite, b) zwei Winkel und eine Gegenseite; III. drei Seiten; IV. drei Winkel. Die Behandlung der 4 ersten Fälle geschieht teils mit Zurückführung auf rechtwinklige Dreiecke, teils mittelst des Sinussatzes, wobei er jedoch die Doppeldeutigkeit der Fälle I, b und II, b nicht erkennt. Von weit gröfserem Interesse sind für uns die Nummern III und IV, da Stellung und Lösung dieser beiden Aufgaben hier zum erstenmale in der uns bekannten Litteratur auftreten[5]).

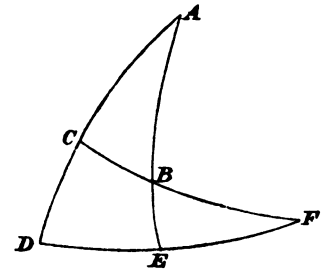


Fig. 22.

Die erste Aufgabe wird sehr einfach auf die folgende Weise gelöst: Man ergänzt $\triangle ABC$ in Fig. 22, dessen Seiten bekannt sind, zum vollständigen Viereck, indem man $AD = AE = 90^0$ macht und D und E mittelst eines gröfsten Kreisbogens verbindet; dann kennt man auch $BE = 90^0 - c$, $CD = 90^0 - b$ und hat mit dem Ersatztheorem: $\sin FB : \sin FC = \sin BE : \sin CD = \cos c : \cos b$. Somit ist das Verhältnis der Sinusse der beiden Bögen FB und FC bekannt, und da ihre Differenz a ebenfalls ge-

1) A. a. O. 180. — 2) 184—190. — 3) 180—189. — 4) 190—200. — 5) Vgl. S. 26.

geben ist, so kann man die Bögen einzeln berechnen[1]). Jetzt kennt man in den rechtwinkligen Dreiecken FEB und FCD je eine Kathete und die Hypotenuse und kann hieraus FE und FD bestimmen, also auch Bg. $DE = \sphericalangle A$. Ähnlich erhält man die übrigen Winkel. Wir wollen gleich hier bemerken, dafs wir genau derselben Lösung wieder bei Regiomontan begegnen werden, dem sie bisher zugeschrieben wurde.

Am meisten Interesse beansprucht das Problem der Bestimmung der Seiten des Dreieckes aus den drei Winkeln und zwar einerseits deswegen, weil schon zu seiner Stellung ein tiefes Eindringen in den Unterschied zwischen der Ebenen- und Kugelgeometrie nötig war, und andererseits wegen der eigenartigen Durchführung, die ihm Naṣîr Eddîn zuteil werden läfst. Derselbe bedient sich nämlich zu seiner Lösung des Supplementardreieckes, ganz wie nachmals im Abendlande Willebrod Snellius, bei dem man bisher die erste praktische Verwendung desselben finden zu müssen glaubte[2]). Die Lösung der Aufgabe wird folgendermafsen skizziert: Man verlängere in dem Dreieck ABC (Fig. 23) AB und AC so, dafs $AD = AE = 90^0$ wird; ebenso mache man $BF = BH = 90^0$ und desgleichen $CK = CT = 90^0$. Die gröfsten Kreisbögen, welche bezüglich durch D und E, F und H, K und T gehen, bilden dann das $\triangle LMN$, welches wir heute als Supplementardreieck bezeichnen. Da nun die drei Winkel A, B, C bekannt sind, so kennt man auch die sie messenden Bögen DE, FH, KT. Hieraus folgt dann die Kenntnis von $LT = KM = 90^0 - TK$ und somit von $LM = 180^0 - TK = 180^0 - \sphericalangle C$; ebenso erhält man die beiden anderen Seiten $LN = 180^0 - \sphericalangle B$ und $MN = 180^0 - \sphericalangle A$ und findet hieraus mit der Lösung der Aufgabe III. die drei Winkel L, M, N. Da diese aber durch die Bögen HK, DT und EF gemessen werden, und z. B. $CK = BH = 90^0$ ist, so folgt hieraus die Kenntnis von $BC = 180^0 - HK = 180^0 - \sphericalangle L$, und auf gleiche Weise erhält man die beiden anderen Seiten CA und AB. Zu dieser Lösung fügt Naṣîr Eddîn noch die Figuren für die Fälle bei, in denen

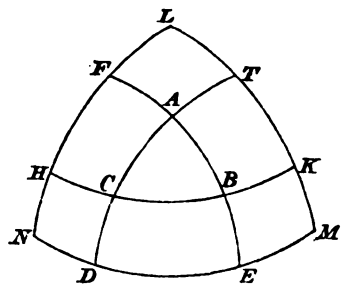


Fig. 23.

1) Vgl. S. 23 und S. 60. Anmerk. 4. — 2) Vgl. z. B. Cantor II. 647. R. Wolf, H. A. I. 223. — Wir haben übrigens in Bibliotheca mathematica 1898. 65 ff. gezeigt, dafs auch im Abendlande Vieta schon 1593 desselben sich bediente.

eine der Dreiecksseiten ein Quadrant oder gröfser als ein solcher wird.

Wir müssen hier vorgreifend bemerken, dafs die Priorität in Stellung und Lösung dieser Aufgabe bisher unbestrittenes Eigentum des schon mehrfach erwähnten Regiomontan war, der auch nach der allgemeinen Ansicht der Historiker der erste gewesen, der ein Lehrbuch der Trigonometrie schrieb[1]). Durch Wiederauffindung von Naṣîr Eddîns Werk ist bewiesen, dafs auch dieser Ruhm den Arabern gebührt, und der Inhalt der Schrift dürfte die Ansicht gründlich zerstören, als hätten dieselben nur die Überlieferungen der Griechen treu bewahrt, ohne sie selbständig schöpferisch zu erweitern und auszubauen.

Naṣîr Eddîns Werk verdient in Wahrheit den Titel eines Systems der Trigonometrie, denn wenn auch seine Vorgänger Abû'l Wafâ, Abû Naṣr, Al-Bîrûnî und andere ihren astronomischen Werken Kapitel vorausstellten, in denen sie eine Zusammenstellung und Begründung trigonometrischer Regeln gaben, so trat hier die Trigonometrie doch immer noch als Hilfswissenschaft der Astronomie auf, ohne sich selbst Zweck zu sein[2]). Naṣîr Eddîn dagegen erkannte ihre mathematische Bedeutung an sich und suchte sie daher als selbständige Wissenschaft zu begründen, indem er das vollständige Viereck zugrunde legte. Alle seine Fundamentalsätze sind völlig konsequenter Weise an dieser Figur entwickelt, und die Fälle der hierdurch zutage geförderten Hilfsmittel, sowie die Leichtigkeit, mit welcher sie gehandhabt werden, mufs jeden Leser überraschen. Dabei darf man nicht aus dem Auge verlieren, dafs die Araber keine abkürzende Schreibweise und keine Formelsprache wie wir besafsen, sondern alle ihre Ableitungen nur an geometrischen Figuren und in Worten ausführten.

Man hat bemerkt, dafs sich in Naṣîr Eddîns Werk der Cosinussatz nicht findet — das ist richtig! Aber abgesehen davon, dafs derselbe nicht in das System des Persers pafst, da er ja in gar keinem Zusammenhang mit dem sphärischen Viereck steht, kannten die Araber, wie schon früher bemerkt, denselben als einen Satz des sphärischen Dreieckes bisher überhaupt nicht und gelangten, soweit unsere Kenntnisse der Litteratur reichen, auch später niemals zu einer Formulierung desselben.

---

1) S. Günther, Allgemeine deutsche Biographie XXII. 573. — 2) Natürlich gilt diese Äufserung nur, insoweit wir die arabische Litteratur bis jetzt kennen; es ist ganz gut möglich, ja sogar wahrscheinlich, dafs schon vor Naṣîr Eddîn selbständige trigonometrische Systeme bestanden.

§ 6. Ulûg-Beg und die Lösung der Dreiteilungsgleichung.

Nach Naṣîr Eddîn, dessen Werk einen Markstein in der Geschichte der Trigonometrie bildet, begegnen wir nur noch einem hervorragenden Gelehrten des fernen Ostens, der die glänzende Reihe der Astronomen schliefst. Es ist dies Ulûg-Beg, geboren 1393, ermordet 1449, der Enkel des Tartarenfürsten Tîmûr oder Tamerlan, der am Ende des 14. Jahrhunderts Bagdad erobert und ein selbständiges Reich mit der Hauptstadt Samarkand geschaffen hatte. Durch ihn, seinen Sohn Schâhruch und besonders durch Muḥammed ibn Schâhruch Ulûg-Beg wurde diese Stadt bald ein neues Zentrum für Handel und Gewerbe, Künste und Wissenschaften. Ulûg-Beg war selbst ein bedeutender Astronom, errichtete in Samarkand eine neue Sternwarte und gründete eine Art astronomischer Akademie, aus der astronomische Tafeln[1]) von hohem Werte sowie ein schätzbarer Sternkatalog hervorgingen. Auch dieses Tafelwerk beruht, wie das Naṣîr Eddîns, auf den Ḥakimitischen Tafeln des Ibn-Jûnos, weist aber auch manche Ähnlichkeit mit dem des Persers auf. So zeigt sich Ulûg-Beg im Besitze aller trigonometrischen Methoden seiner Vorgänger, indem er mit grofser Gewandtheit die Regeln des rechtwinkligen sphärischen Dreieckes, wie auch die Projektionsmethode handhabt. Bei seiner Berechnung der Sinustafeln aber bedient er sich eines sehr bemerkenswerten Verfahrens, auf das wir näher eingehen müssen.

Es ist dies die direkte Berechnung von $\sin 1^0$ mittelst der Lösung der Dreiteilungsgleichung, die er durch ein geniales Näherungsverfahren bewältigt. Maḥmûd ibn Muḥammed ibn Ḳâḍîzâdeh, genannt Meriem (oder Mîram) el-Tschelebî[2]) († 1412) hat uns dasselbe in seinem Kommentar zu jenen Tafeln überliefert.

---

1) A. Sédillot hat 1847 den persischen Text der Einleitung und 1853 die französische Übersetzung desselben herausgegeben: Prolégomènes des tables Astronomiques d'Oloug-Beg. Paris 1847 und 1853. 8°. Die Tafeln selbst sind nicht veröffentlicht. Das persische Original wurde auch ins Arabische übersetzt. — 2) Von diesem Gelehrten finden sich im Eskurial und in der Leydener Bibliothek noch astronomische Werke; es wäre sehr erwünscht, über sie genauere Berichte zu haben. (Vgl. Sédillot a. a. O. 1853. p. 225.) Meriem spricht die Erfindung der Methode einem gewissen Aṭal-Eddîn-Dschamschîd aus dem Gelehrtenkreise Ulûg-Beg's zu (a. a. O. 77, Anmerk., vgl. Hankel 293 und Cantor I. 736), wir glauben jedoch, dafs diese Methode viel älteren Ursprungs ist, denn die Dreiteilungsgleichung wurde schon von Abû'l Dschûd, einem Zeitgenossen Al-Bîrûnî's aufgestellt (Wöpcke, L'Algèbre d'Omar Alkayami. Paris 1851. 125), der sich mit Glück mit der Lösung algebraischer Aufgaben beschäftigte, die der letztere gestellt hatte (Cantor I. 714). Da nun das Problem von grofser Wichtigkeit für die exakte Berechnung der Sinus-

Die Ableitung der Teilungsgleichung wird folgendermafsen ausgeführt[1]). Es sei in dem Kreise ABC (Fig. 24) mit dem Zentrum M, arc. AB = arc. BC = arc. $CD = 2^0$. Die Sehnen AB, AC, AD treffen den Halbkreis über dem Durchmesser MA (Zentrum K) bezüglich in E, G, H, ferner trifft BGM die Linie AH in L und KE die AG in T, die AH in I und es ist $ET = TI$. Zieht man noch die Sehnen $GE = GH = AE$ und $AG = EH$, so ist $AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\,\mathrm{crd}\,2^0 = \sin 1^0 = x$, und $AH = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}\,\mathrm{crd}\,6^0 = \sin 3^0$. In dem Vierecke $AEGH$ aber ist nach dem Satze des Ptolemäus $AE \cdot GH + EG \cdot AH = AG \cdot EH$, oder $AE^2 + AE \cdot AH = AG^2$, d. h. $x^3 + x \sin 3^0 = AG^2$. Ferner ist aus $\triangle BCM' : BC^2 = BG \cdot BM'$, oder $BA^2 = BG \cdot 2r$, für $BM' = 2r$, also $BG = \frac{2x^2}{r}$, und da aus $\triangle ABG$ $AG^2 = 4x^2 - BG^2$ folgt, so hat man

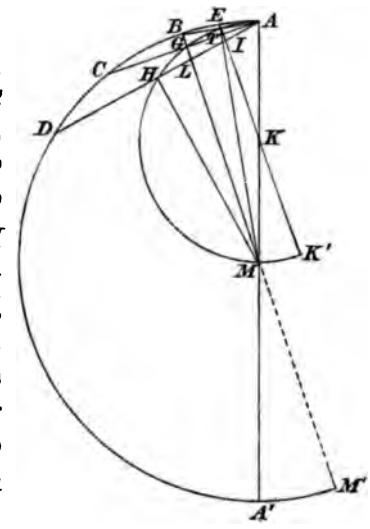


Fig. 24.

$4x^2 - \left(\frac{2x^2}{r}\right)^2 = AG^2$ und schliefslich durch Vergleichung mit dem bereits gefundenen Wert von AG^2 und einiger Reduktion:

$$x = \frac{x^3 + \frac{r^2}{4}\sin 3^0}{\frac{3}{4}r^2}.$$

Diese Gleichung geht für $x = \sin\alpha$, $\sin 3^0 = \sin 3\alpha$ in die allgemeine Dreiteilungsgleichung über. Betrachtet man jetzt r als eine neue Sexagesimaleinheit, indem man $60^p = 1^r$ setzt, so ergibt sich

---

tabellen ist, so wird die Auflösung der einmal gegebenen Gleichung wohl nicht 400 Jahre haben auf sich warten lassen. Aufserdem wissen wir, dafs im Abendlande Leonardo Pisano, der ein Schüler der Araber war, um das Jahr 1200 Näherungsmethoden zur Auflösung von höheren Gleichungen besafs, und später haben J. Bürgi und Pitiscus (1600), wie sich zeigen wird, bereits genau dieselbe Methode zur Lösung der Dreiteilungsgleichung verwendet, dafs aber damals schon dem Abendlande Ulûg-Beg's Schriften bekannt waren, ist nicht wahrscheinlich, indem die astronomischen Kenntnisse dem Occident durch die Westaraber zuflossen. Und zwar haben wir die gegründete Vermutung, dafs sich diese Näherungsmethode in den Schriften des spanischen Arabers Al-Zarkâli (um 1080) finden dürfte, denn dessen Werke haben auf die Entwickelung der Astronomie im Abendlande sehr viel Einfluſs gehabt.

1) Prolégomènes 80—82.

$x = (x^3 + 15^r \sin 3^0) : 45^r$. Aber $\sin 3^0$ läfst sich durch bekannte Methoden (durch Quadratwurzelziehen) finden und man erhält $15^r \sin 3^0 = 47^r\ 6^p\ 8'\ 29''\ 53'''\ 37^{IV}\ 3^V\ 45^{VI} = 47{,}102360618^r = Q$; setzt man $45^r = P$, so hat man schliefslich die Gleichung zu lösen:

$$x = (x^3 + Q) : P.$$

Sei[1]) die gesuchte Wurzel der Gleichung

$$x = A + \frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m^2} + \frac{a_3}{m^3} + \cdots,$$

wobei m von den Arabern $= 60$, von uns $= 10$ genommen wird, und sei dieselbe eine im Verhältnis zu Q kleine Gröfse, so dafs man als eine erste Annäherung $\frac{Q}{P} = A + \frac{R_1}{P}$ setzen kann, woraus der Rest $R_1 = Q - AP$ folgt; dann möge $x = A + y_1$ der wirkliche Wurzelwert sein. Führt man diesen in die Gleichung ein, so folgt: $A + y_1 = [(A + y_1)^3 + Q] : P$, oder wenn man y_1 in $A + y_1$ gegen A vernachlässigt, $y_1 = (A^3 + Q - PA) : P = (A^3 + R_1) : P = \frac{a_1}{m} + \frac{R_2}{P}$, wobei die Division auf eine Stelle ausgeführt wurde. Hieraus folgt der Rest $R_2 = A^3 + R_1 - P \cdot \frac{a_1}{m} \cdot$ — Jetzt ist in zweiter Annäherung $x = A + \frac{a_1}{m} + y_2$. Führt man diesen Wert wieder in die Gleichung ein, so kommt: $A + \frac{a_1}{m} + y_2 = \left[\left(A + \frac{a_1}{m} + y_2\right)^3 + Q\right] : P$, oder mit Vernachlässigung von y_2 unter dem Kubus:

$$y_2 = \left[\left(A + \frac{a_1}{m}\right)^3 + Q - P\left(A + \frac{a_1}{m}\right)\right] : P =$$

$$= \left[\left(A + \frac{a_1}{m}\right)^3 - A^3 + R_2\right] : P = \frac{a_2}{m^2} + \frac{R_2}{P},$$

und hieraus $R_3 = \left(A + \frac{a_1}{m}\right)^3 - A^3 + R_2 - \frac{a_2}{m} P = Q - P\left(A + \frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m^2}\right) + \left(A + \frac{a_1}{m}\right)^3$; ist $x = A + \frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m^2} + y_3$ in dritter Annäherung, so folgt ebenso $y_3 = \left[\left(A + \frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m^2}\right)^3 + Q - P\left(A + \frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m^2}\right)\right] : P$ $= \left[\left(A + \frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m^2}\right)^3 - \left(A + \frac{a_1}{m}\right)^3 + R_3\right] : P = \frac{a_3}{m^3} + \frac{R_4}{P}$ u.s.w. Man erkennt, wie man auf diese Weise die Wurzel in Dezimal- oder Sexagesimalbrüchen Stelle für Stelle berechnen kann. Der Algorithmus beruht somit einfach darauf, dafs immer die Differenz der dritten Potenzen der beiden letzten aufeinanderfolgenden Näherungswerte zum

1) Fr. Wöpcke hat diese Methode eingehend untersucht und auf ihre Zuverlässigkeit geprüft. Journal de Mathématiques t. XIX. 1854. 167 ff. und 301 ff. An ihn anschliefsend hat sie Hankel 290—293 algebraisch dargestellt, dem wir in der Hauptsache folgen.

Rest addiert den neuen Dividenden gibt. Aus der oben angeführten Gleichung ergibt sich dann $\sin 1^0 = 1^p 2' 49'' 43''' 11^{IV}$, ein Resultat, welches noch in den Quarten richtig ist[1]).

Aufser dieser eleganten Methode war zu Ulûg-Beg's Zeiten jenes Interpolationsverfahren, das wir bei Abû'l Wafâ kennen lernten, noch nicht vergessen, und so wurden denn die neuen Sinustafeln für alle Minuten und $r = 60^p$ mit grofser Genauigkeit berechnet[2]); auch stellt Ulûg-Beg eine Tangententafel[3]) her, die von 0^0 bis 45^0 für alle Minuten und von 45^0 bis 90^0 von 5 zu 5 Minuten fortschritt. Eine weitere Tafel enthielt die von Grad zu Grad des Winkels fortschreitenden Cotangenten, oder zweiten Schatten.

Mit der Schilderung der Verdienste Ulûg-Beg's verlassen wir den fernen Osten, wollen aber, bevor wir die Blütezeit der arabischen Mathematik in Spanien darstellen, noch einen kurzen Rückblick auf die gewonnenen Resultate werfen. Da bemerken wir nun zunächst, mit welcher Gewandtheit die Araber es verstanden, mit dem von den Indern überkommenen Sinus die Schwerfälligkeit der griechischen Sehnenrechnung zu beseitigen, und wie sie ferner, die Tragweite des Satzes von Menelaus erkennend, einerseits seine Verwendbarkeit zu steigern suchten, andererseits aber durch ihn zu völlig neuen und wesentlich einfacheren Relationen geführt wurden, die heute noch das Fundament unserer Trigonometrie bilden. Aus der Gnomonik der Inder und dem Analemma des Ptolemäus überkamen sie des weiteren die Methode der Orthogonalprojektion und den Begriff des Sinus versus, verstanden es aber sehr bald, die schwerfälligen Regeln der Inder durch einfachere zu ersetzen und dem schattenwerfenden Stabe den Begriff zweier neuer trigonometrischer Funktionen zu entlocken, die in den Händen Abû'l Wafâ's und Naṣîr Eddîn's die verwendbarsten Werkzeuge der praktischen Rechnung wurden. Ja letzterer vermochte es sogar, ein System unserer Wissenschaft aufzubauen, indem er sie aus ihrer dienenden Stellung gegenüber der Astronomie befreite, und zwar ein System, so klar und vollständig, dafs ihm das christliche Europa bis zum 16. Jahrhundert kaum ein ebenbürtiges an die Seite zu stellen vermag. Halten wir dazu noch die geistreichen Näherungsmethoden, die sie teils zur Umgehung der Dreiteilungsgleichung, teils zur direkten Verwendung derselben entwickelten, so werden wir ihnen Originalität und eigene schöpferische Kraft gewifs nicht mehr in Abrede stellen können.

---

1) Wöpcke a. a. O. 176. — 2) Ulûg-Beg a. a. O. 83. — 3) Ebenda 86.

5. Kapitel.

Die Westaraber in Spanien und Afrika.

§ 1. Al-Zarkâli und Dschâbir ibn Aflaḥ.

Unter den Khalifen 'Abd-Almelik (684—705) und Welid I. (705—717) war die Nordküste Afrikas unter die Botmäfsigkeit des Islam gebracht worden, sodafs das arabische Weltreich damals alle Länder von der äufsersten Westgrenze Afrikas bis Indien umfafste. Mûsâ, der Statthalter Afrikas, fafste nun in Übereinstimmung mit Welid den Plan, auch Spanien zu unterwerfen, was ihm hauptsächlich durch die Tapferkeit seines Feldherrn Târik nach langen und blutigen Kämpfen zum gröfsten Teile gelang, indem derselbe in der Schlacht bei Xeres de la Frontera den Gotenkönig Roderich besiegte und die Hauptstadt Toledo einnahm. Mûsâ's Sohn Abdel-Aziz wurde der erste Statthalter des neuen Reiches, das noch bis zur Mitte des 8. Jahrhunderts unter der Herrschaft der Khalifen von Bagdad blieb. Als aber die Regentenfamilie der Omajaden 750 durch die Abbasiden verdrängt wurde, da flüchtete sich der letzte Omajade 'Abd-Arraḥmân nach Afrika und es gelang ihm mit Hilfe seiner dort gesammelten Anhänger dem damals in Spanien regierenden Emir Jussuf das Land zu entreifsen und eine selbständige Herrschaft zu gründen (755). Cordova wurde die Residenz des neuen Khalifen und blieb während der über 300 Jahre dauernden Herrschaft der Omajaden nicht nur die politische Hauptstadt des Reiches, sondern auch das Zentrum für Wissenschaften und Künste, die in Spanien zu nicht geringerer Blüte, als im Orient gelangten. Namentlich waren es 'Abd-Arraḥmân III. (912—950) und dessen Sohn Al-Ḥakam II. (950—976), die keine Mühe und Kosten scheuten, um die kostbarsten Werke im Orient und Occident zu erhalten. Unter des letzteren persönlicher Fürsorge entstand in seinem Palaste in Cordova eine Bibliothek von 600000 Bänden, deren Brauchbarkeit durch einen Katalog von 44 Bänden erhöht wurde. Aber nicht nur in Cordova, sondern auch in den meisten Provinzialstädten wurden Bibliotheken und Akademien der Wissenschaft gegründet, in denen von den gelehrtesten Moslims — denn Andersgläubige duldeten jene beiden Herrscher nicht — Vorlesungen über alle Gebiete des Wissens gehalten wurden.

Obwohl uns nun aber überliefert ist, dafs in diesem goldenen Zeitalter der arabischen Litteratur in Spanien eine grofse Anzahl von Schriftstellern über Mathematik, Astronomie und Astrologie arbeitete,

und obwohl die spanischen Bibliotheken noch heute im Besitze einer Menge von arabischen Handschriften sind, so fehlt uns doch aus jener Zeit jede genauere Kunde über die Pflege der uns speziell interessierenden Wissenschaft, da aus diesen reichen Schätzen bisher soviel wie nichts veröffentlicht wurde. Es ist dies umsomehr zu bedauern, als diese Glanzperiode mit dem Tode Al-Ḥakam's keineswegs erlosch, sondern unter Al-Mansûr, der durch seine 50 blutigen Kriege gegen die christlichen Reiche, die in Leon, Navarra, Castilien und Barzelona entstanden waren, berühmt ist, noch bis in das 11. Jahrhundert fortbestand. Die arabischen Akademien besafsen damals solchen Ruf, dafs eine Menge Lernbegieriger aus ganz Spanien, Nordafrika, Ägypten, Syrien, ja sogar aus Arabien, Persien und dem fernen Indien in Spanien zusammenströmte, um direkt an den Quellen der Gelehrsamkeit zu schöpfen. Die Behauptung[1]), dafs auch Wissensdurstige aus den christlichen Ländern Frankreich, England, Italien und Griechenland, ja sogar aus Deutschland sich daselbst einfanden, ist mit Vorsicht aufzunehmen, da ihnen, wie schon erwähnt, von Seiten der glaubenseifrigen Emire sicher die gröfsten Schwierigkeiten in den Weg gelegt wurden.

Aber nicht einmal die Namen der Gelehrten, die in jener Zeit Mathematik und Astronomie lehrten, sind uns bekannt, erst im 11. Jahrhundert, als mit dem Erlöschen der Omajadenherrschaft und dem Vordringen des christlichen Elementes die Pflege der Wissenschaften allmählich herabsank, stofsen wir auf zwei Männer, deren Einflufs auf die Entwickelung der Astronomie und damit auch der Trigonometrie durch das ganze Mittelalter und vornehmlich im Zeitalter der Renaissance nicht unterschätzt werden darf. Es sind dies die Astronomen Abû'l Ḳâsim Ibn 'Abdî'r Raḥman Al-Zarkâli[2]), von den Lateinern Arzachel genannt, der um 1080 in Toledo lebte, und Abû Muḥammed Dschâbir ibn Aflaḥ, gewöhnlich Gabir oder Geber geheifsen, der ebenfalls der zweiten Hälfte des 11. Jahrhunderts angehört und sich wahrscheinlich in Sevilla aufhielt.

Der erstere galt, ob mit Recht oder Unrecht, als der berühmteste Astronom seiner Zeit; unter seiner Leitung entstanden die sogenannten Toledanischen Tafeln, die von einem Kollegium moslemitischer und jüdischer Gelehrter verfafst wurden und sich einer enormen Verbreitung erfreuten[3]). Die Einleitung zu diesen Tafeln,

---

1) Aschbach, Geschichte der Omajaden in Spanien II. 235. — 2) Über den Namen Arzachel's siehe Wittstein, Zeitschr. f. Math. und Phys. Hist.-litt. Abtl. 1894. XXXIX. 42. — 3) M. Steinschneider, Études sur Zarkâli. Bulletino di bibl. e di storia XX. 7, gibt an, dafs sich noch jetzt nicht weniger,

die „Canones sive regulae tabularum Astronomiae“[1]), in welcher die Berechnung der Tafeln auseinandergesetzt ist, stammt von Al-Zarkâli selbst und hätte wegen ihres hervorragenden Einflusses auf die spätere Astronomie schon längst eine Veröffentlichung verdient. In der erwähnten lateinischen Übersetzung findet sich ein Kapitel: „De inventione sinus et declinationis per Kardagas“, worin jedenfalls jene Methode indischen Ursprungs angeführt ist, die uns Peurbach[2]) als „de mente Arzachelis“ entnommen mitteilt. Dieselbe besteht kurz in Folgendem: Er berechnet zuerst die Sinusse der 6 Kardagarum circuli, d. h., da bei ihm Kardaga einen Bogen von 15° bedeutet, der ersten 6 ganzen Vielfachen von 15° aus Fig. 25, deren Konstruktion leicht ersichtlich ist. Aus ihr folgt: $np = \sin 2.15^0 = \frac{r}{2}$, $nq = \sin 4.15^0 = \frac{r}{2}\sqrt{3}$, $gt = \sin 3.15^0 = \frac{r}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}ma = \sin 15^0 = \sqrt{ao^2 + mo^2} = \sqrt{\left[r - \frac{r}{2}\sqrt{3}\right]^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2}$. Ist ferner $\text{arc}.ugx = 30^0$, so ist $\text{arc}.xf = 75^0$ und $xz = \sin 5.15^0 = \sqrt{r^2 - \sin^2 15^0}$, $\sin 6.15^0 = r$ [3]). Nun erhält man durch die bekannte Halbierungsformel $\sin 7\frac{1}{2}^0$, dann $\sin 82\frac{1}{2}^0 = \sqrt{r^2 - \sin^2 7\frac{1}{2}^0}$; hieraus wieder $\sin 3\frac{3}{4}^0$ und $\sin 86\frac{1}{4}^0$. Nun nimmt man dieselben

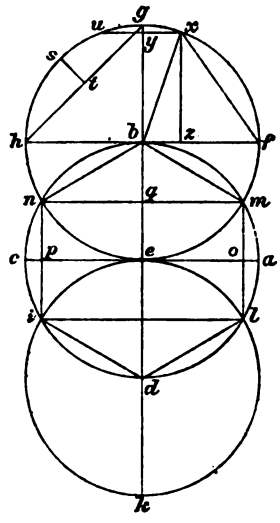


Fig. 25.

als 48 Manuskripte, teils in arabischer, teils in lateinischer Sprache an verschiedenen Bibliotheken nachweisen lassen.

1) Cat. mss. Angl. p. 72 (bis) n. 1487⁹. Lond. (Ka. 61). — 2) Vgl. S. 45. Anm. 6. — Georgii Peurbachii tractatus super propositiones Ptolemai de Sinibus et Chordis. Norimb. 1541. 2°. — Dafs Al-Zarkâli die Methoden der Inder und den grofsen Sindhind kannte, ergibt sich aus 2 Stellen in dem auf Befehl Alfons X. übersetzten Werke desselben über sein Astrolabium. Es heifst daselbst (Libros del saber Vol. III. 236 und 237): Et si ouieres el logar del sol ó de la estrella sigue la opinion de los „indios.“ ó de los „perseos.“ und: „Et todo aquel que sacar el grado dell ascendent por el sol que es eguado con los taulos de los indios. ó de los perseos. en este nuestro tiempo. assí cuemo lo que sacamos por Al Muntahin. es luenne de la verdat. mas solamientre puede seer esto verdat acordándose amos las oppiniones. Al Muntahin con Açindihind en los logares de las estrellas. et del sol. et de la luna. assí cuemo arcordaron al comiençó de alhigere con encerte dumbre.“ Diese Stelle ist auch ein neuer Beweis für die von uns vertretene Ansicht, dafs gerade die Methoden zur Bestimmung der Sonnenhöhe etc. von den Indern überkommen sind. — 3) Hier folgt eine fehlerhafte Stelle über die Berechnung der 2., 3. u. s. w. Kardagen, welche wahrscheinlich durch den Übersetzer falsch wieder-

Operationen ausgehend von $\sin 45^0$ vor und erhält daraus die Sinusse von $22\frac{1}{2}^0$, $67\frac{1}{2}^0$, $11\frac{3}{4}^0$, $78\frac{3}{4}^0$, $73\frac{1}{2}^0$, $52\frac{1}{2}^0$ u. s. w. Man erkennt, dafs diese Methode genau dieselbe ist, die die Inder zur Berechnung ihrer Tafeln verwendeten, und daher auch nur diese Tafeln liefert[1]). Al-Zarkâli hat sie jedenfalls dem grofsen Sindhind entnommen, den er, wie schon erwähnt, wohl kannte. In einem andern Manuscript[2]), das eine Übersetzung von Gerhard von Cremona darstellt, zeigt das Inhaltsverzeichnis, dafs Al-Zarkâli die Methoden zur Berechnung von Tafeln für den Sinus und den Sinus versus daselbst auseinandersetzt. Dabei bedient er sich einmal eines Radius von 150′, eine Neuerung, deren Grund man nicht einsieht, und dann wieder eines solchen von 60^p und führt die Berechnung auf Minuten, Sekunden und Terzen aus[3]). Auch eine Schattentafel konstruiert er sich, geht aber in ihrer Verwendung nicht über Al-Battâni hinaus, woraus wohl gefolgert werden darf, dafs Abû'l Wafâ's wichtige Entdeckung den Westarabern nicht bekannt war, oder dafs sie wenigstens den Nutzen derselben nicht einsahen.

Die astronomischen Leistungen Arzachel's gipfeln in der Erfindung eines sehr verwendbaren Astrolabiums, ṣafîḥa = Scheibe genannt, das auf lange Zeit eine grofse Verbreitung fand, denn es findet sich eine ganze Reihe arabischer und hebräischer Schriften über dasselbe[4]), und auch im christlichen Mittelalter, ja selbst noch im 16. Jahrhundert wurde es vielfach verwendet[5]). Übrigens besafs man schon lange vor Al-Zarkâli Instrumente, welche die Himmelskugel durch stereographische Projektion auf die Ebene abbildeten. So erwähnten wir bereits (S. 11. Anm. 5), dafs Hipparch im Besitze eines Planisphäriums war, über welches wir eine Abhandlung haben, die dem Ptolemäus zugeschrieben wird, und stellten die

---

gegeben und von Peurbach kritiklos abgeschrieben wurde. Da sie jedoch die folgende Rechnung nicht beeinflufst, so übergehen wir sie.

1) Vgl. S. 36. — 2) Mss. Ottobon. 1826. Vatikan. — 3) Delambre, Hist. de l'Astr. du moyen âge 171 und Regiomontan, Compositio tabularum sinuum. — Die erste Tafel Arzachel's enthält die Sinusse von 1° zu 1°, die letztere von ¼ zu ¼ Grad. — 4) Steinschneider, Bulletino di bibl. e di stor. XVIII. 343. Die Schrift selbst ist ins Spanische übersetzt im III. B. der Libros del Saber enthalten. — 5) Regiomontan z. B. hat es in Anlehnung an Arzachel in der 2. Hälfte des 15. Jahrh. wieder konstruiert (Problemata XXIX. Saphaeae Nobilis Instrumenti Astronomici, ab Joanne de Monteregio . . . conscripta, 1534, in 4° von Schöner herausgegeben), und Gemma Frisius beschreibt es, vielleicht unabhängig von seinen Vorgängern in „De Astrolabo Catholico liber". Antwerpiae 1556. 8°. Vgl. über dieses Instrument A. Wittstein, „Über die Wasseruhr und das Astrolabium des Arzachel." Zeitschr. für Math. und Phys. 1894. XXXIX, Hist.-litt. Abt. 41 ff. und 81 ff.

Vermutung auf (S. 11. Anm. 1), dafs bereits die Ägypter solche Instrumente kannten. Bei den Arabern aber waren sie allgemein im Gebrauch; von der Saphäa Arzachel's unterscheiden sie sich nur dadurch, dafs bei ihnen als Augpunkt der stereographischen Projektion der Südpol und als Projektionsebene die Tangentialebene im Nordpol genommen ist, während bei dem letzteren der Augpunkt in dem Ost- oder Westpunkt des Horizontes und zugleich in einem der Äquinoktialpunkte liegt, und als Projektionsebene der Meridian und der damit zusammenfallende Kolur der Solstitien aufgefafst wird[1]). Uns interessiert jedoch weniger diese zu Ablesung aller Zeitbestimmungen dienliche Einrichtung der Astrolabien, als vielmehr das auf ihrer Rückseite (dorsum oder postica der Lateiner) verzeichnete, zu feldmesserischen Zwecken benützte „geometrische Quadrat", das sich auf den meisten dieser Instrumente findet und zu einer Anwendung der „Schatten" Anlafs gab. Die Rückseite[2]) wurde nämlich durch einen in 360° geteilten Kreis begrenzt, in welchem ein Quadrat *fghi* eingeschrieben war (Fig. 26), dessen Seiten in je 24 gleiche Teile geteilt waren. Dieselben wurden von den zu den Seiten parallelen Durchmessern aus mit den Nummern 1 bis 12 bezeichnet, so dafs man eigentlich nur die Quadrate *engp* und *enfo* nötig hatte, die auf manchen Astrolabien auch allein verzeichnet waren. Um den Mittelpunkt *e* war ein Diopterlineal *kl* drehbar, welches beim Visieren auf einer der Quadratseiten des mit der linken Hand vertikalgehaltenen Instrumentes bei einem bestimmten Teilpunkte einschnitt. Die abzulesenden Abschnitte auf den zum horizontalen Durchmesser parallelen Quadratseiten, hiefsen die „geraden Schatten" (puncta umbrae rectae) und die auf den vertikalen Quadratseiten die „inversen Schatten" (puncta umbrae versae), erstere sind also unsere Tangenten, letztere die Cotangenten und aus der Gnomonik der Araber herübergenommen. Wir werden später sehen, wie sich allmählich das Quadrat vom Astrolabium loslöste und zu einem eigenen Mefsinstrument wurde.

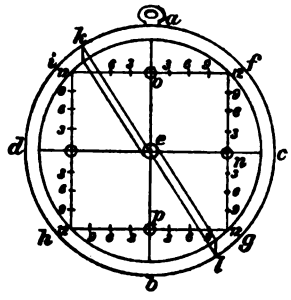


Fig. 26.

Aufser den mitgeteilten ziemlich spärlichen Nachrichten können wir über Al-Zarkâli nichts beibringen, besondere Fortschritte hat ihm jedenfalls unsere Wissenschaft nicht zu verdanken, sonst wäre

1) Vgl. hierüber Wolf, H. A. II. 70—74 und A. Wittstein a. a. O. 82—83 und 85. — 2) Diese Beschreibung entnehmen wir M. Curtze, Über die im Mittelalter zur Feldmessung benützten Instrumente. Biblioth. math. 1896. 65 ff.

Delambre, dem zwei Manuskripte[1]) der Toledanischen Tafeln vorlagen, sicher darauf eingegangen, dennoch aber wären genauere Notizen über dieselben sehr wünschenswert, um ein Urteil über den Stand der Kenntnisse der spanischen Mauren in der Trigonometrie in jener Zeit zu gewinnen und zu sehen, inwieweit sie mit der Entwickelung derselben im Mutterlande gleichen Schritt hielten.

Über den zweiten Gelehrten, den wir nannten, Dschâbir ibn Aflaḥ können wir ausführlicher berichten, da wir von ihm noch 9 Bücher über die Astronomie in einer von Peter Apian herausgegebenen Übersetzung des Gerhard von Cremona besitzen[2]). Er zeigt uns eine bemerkenswerte Selbständigkeit und Kritik; während nämlich Ptolemäus sowohl von Ost- als Westarabern stets aufs höchste geachtet wurde, und Niemand sich an seiner Autorität zu rühren getraute, ergeht sich Dschâbir in einer scharfen Polemik gegen diesen Heros der Astronomie, indem er sowohl die Richtigkeit mancher seiner Betrachtungen angreift, als auch und ganz besonders gegen seine trigonometrischen Berechnungen zu Felde zieht. Namentlich wirft er ihm vor, dafs seine auf dem Satze des Menelaus beruhende Methode der Dreiecksberechnung umständlich, der Beweis dafür schwierig und für den Lernenden schwer verständlich sei. Darum sagt er, er habe keine Mühe gescheut[3]), um einen einfacheren Weg zu finden, auf dem man zu den nötigen Berechnungen gelangen könne, was ihm auch gelungen sei. Dieser Weg ist aber kein anderer, als die „Regel der vier Gröfsen“[4]). Nun sahen wir schon (S. 17), dafs dieser Satz, wenn auch in etwas anderer Form, bei Menelaus bereits vorkommt und dafs Thâbit in seinem Kommentar zur Sphärik desselben ihn bis auf den letzten Schlufs entwickelte; ein Astronom von der Bedeutung Dchâbir's kannte aber jedenfalls Thâbit's Schriften, die unter den spanischen Arabern ebenso wie im Orient verbreitet waren[5]), und dann war sein Verdienst bei Auffindung jener Regel kein besonders bedeutendes. Immerhin scheint

1) Delambre a. a. O. 176. Mss. de la Bibliothèque du roi. No. 7331 und No. 7431. — 2) Instrumentum primi mobilis a Petro Apiano ... Accedunt iis Gebri filii Affla Hispalensis ... libri IX. de Astronomia ... Norimb. 1534. in 2°. — 3) A. a. O. p. 1. Prooemium. — 4) A. a. O. 2 heifst es: „.... ex quibus (propositiones faciles et breves) extrahitur ignotum ex noto per quatuor numeros proportionales, non per sex numeros compositos sicut praeparantur in figura sectore.“ — 5) Wie schon bemerkt, existiert des Thâbit Werk noch heute in verschiedenen Exemplaren und zwar in arabischem Text und hebräischen Übersetzungen. M. Steinschneider hat eine Schrift Dschâbir's über die figura Kaṭṭa in hebräischer Übersetzung gefunden, die zugleich mit einer ebensolchen Übersetzung von Thâbit's Schrift in demselben Codex sich findet. Zur pseudepigraphischen Litteratur p. 72.

uns aber die Behauptung Geber's, er habe den Satz selbst gefunden, darauf hinzudeuten, dafs Abû'l Wafâ's bahnbrechende Arbeiten in Spanien nicht bekannt waren. Dafür spricht auch der Umstand, dafs Dschâbir die Tangenten nicht benützt.

Er stellt nun die Regel der vier Gröfsen an die Spitze[1]) seiner Trigonometrie, folgert aus ihr den Sinussatz für das rechtwinklige sphärische Dreieck und beweist ihn dann mit dessen Hilfe auch für das schiefwinklige Dreieck. Hierauf findet er jene V. Relation[2]) (S. 25) für das rechtwinklige Dreieck, die nach ihm den Namen „der Satz des Geber" erhalten hat[3]), indem er die Seiten des Dreieckes zu Quadranten ergänzt und auf das entstehende Scheiteldreieck den Sinussatz anwendet. Aufser dieser Gleichung stellt er noch die längst bekannte III. Fundamentalrelation auf und geht dann zur ebenen Trigonometrie über. Schon Hankel hat auf den merkwürdigen Umstand aufmerksam gemacht, dafs er sich hierbei, was die Behandlungsweise anlangt, völlig an Ptolemäus anschliefst, indem er sich sogar der Sehnen statt der Sinusse bedient, und, obgleich er die Bemerkung macht[4]), dafs aus der Kenntnis der Winkel eines Dreieckes die des Verhältnisses seiner Seiten folgt, nicht auf den Gedanken kommt, den Sinussatz für das ebene Dreieck zu formulieren, wie es später Levi ben Gerson und Nasîr Eddîn gethan haben. Dafs der letztere übrigens Dschâbir's Werk nicht kannte, scheint mir zweifellos zu sein, da er ihn sonst sicher ebenso gut, wie seine anderen Gewährsmänner zitiert hätte. — Hervorgehoben mufs noch werden, dafs Geber seine trigonometrischen Lehren mit dem ausdrücklichen Bemerken, „um Wiederholungen zu vermeiden" den astro-

---

1) A. a. O. Prop. XII. lib. I. 10—11. Sein Beweis ist derselbe, wie wir ihn bei Thâbit S. 47 kennen lernten. — 2) Satz XV. p. 13. — 3) Siehe S. 67. — 4) p. 20. — In den Propositionen XXIV, XXV und XXVI löst er die Aufgaben: die fehlenden Stücke eines Dreieckes zu berechnen, von dem zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, zwei Seiten und ein Gegenwinkel und drei Seiten bekannt sind, indem er das Dreieck in zwei rechtwinklige zerlegt und die Hypotenusen der entstehenden Dreiecke als Durchmesser von 120^p betrachtet, um die Beziehung der Sehnen und Winkel zu erhalten. Wir wollen hier seine Behandlung der zweiten dieser Aufgaben kurz skizzieren, da wir dieselbe Methode auch im Mittelalter wieder antreffen werden. In $\triangle ABG$ ist (Fig. d) AB, AG und $\sphericalangle B$ gegeben. Man beschreibt um die bei D rechtwinkligen Dreiecke: $\triangle ADB$ und $\triangle ADG$ Kreise, dann ist aus dem ersteren AD und DB mittelst des $\sphericalangle B$ in Teilen des Durchmessers AB bekannt. Hieraus folgt dann $DG = \sqrt{AG^2 - AD^2}$ und aus dem zweiten $\triangle$ mittelst der Proportion $AG : GD = 120^p : \mathrm{crd}(180^0 - 2G)$ der Winkel G. Endlich ist $GB = GD + DB$.

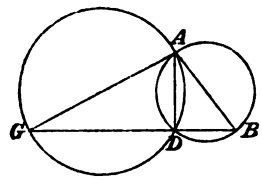


Fig. d.

nomischen Entwickelungen in einem eigenen Traktat voranstellt, also auch schon das Bedürfnis einer selbständigen Trigonometrie fühlt.

Das Wenige, was wir über die Trigonometrie der spanischen Araber kennen gelernt haben, berechtigt uns zu dem Schlusse, dafs gegen das Ende des 11. Jahrhunderts auch bei ihnen, wie schon ein Jahrhundert früher bei den Ostarabern, das Bestreben zu erkennen ist, die trigonometrischen Lehren zu systematisieren und so die Grundzüge einer eigenen Wissenschaft zu schaffen, dafs sie aber in ihrer relativen Unabhängigkeit von letzteren nicht zu jener Vollendung gelangten, wie diese.

§ 2. Abû'l Ḥaṣan Ali von Marokko.

In engerem Kontakte mit dem Mutterlande, als das spanische Reich der Araber, scheint die Nordwestküste von Afrika geblieben zu sein. Auch dort war am Anfang des 9. Jahrhunderts ein eigenes Reich mit der Hauptstadt Fez entstanden und blieb politisch dauernd vom Khalifat in Bagdad getrennt. Auch dort blühten, trotz der beständigen blutigen Kämpfe, die mit dem vielfachen Wechsel der Dynastien verbunden waren, die Wissenschaften, und namentlich die Astronomie fand im 13. Jahrhundert daselbst einen Vertreter, über den wir nicht mit Stillschweigen hinweggehen dürfen.

Abû'l Ḥaṣan, dessen Lebenszeit nicht genauer bekannt ist, schrieb ein Buch über die astronomischen Instrumente der Araber, das uns noch erhalten ist und in einer trefflichen Übersetzung von Sédillot (dem Älteren) vorliegt[1]). Die grofse Anzahl von Schriftstellern, die dieser Autor zitiert, zeigt, dafs er mit den Arbeiten seiner Vorgänger weit vertrauter war, als die spanischen Araber. Von diesen nennt er Al-Zarkâli, als bedeutenden Astronomen und Dschâbir ibn Aflaḥ als Verbesserer der Trigonometrie, von den Ostarabern aber kennt er Al-Chwarizmî, als Wiederhersteller der indischen Tafeln, Al-Battâni, Al-Fergâni, Abû'l Wafâ, Al-Bîrûnî, Ibn Sinnâ und andere. Diese Litteraturkenntnis darf uns auch nicht wundern, da wir wissen, dafs er weite Reisen durch das südliche Spanien und den Norden Afrikas bis Ägypten unternahm, auf denen er seine Kenntnisse sammelte. Sein Werk ist denn auch weniger eine originelle Schöpfung, als vielmehr eine Sammlung von rechnerischen und graphischen Methoden, die er seiner umfassenden Litteraturkenntnis verdankt.

1) Traité des instruments astronomiques des Arabes composé au treizième siècle par Aboul Hhassan Ali de Maroco par J. J. Sédillot. Paris 1834. 4°. 2 Bände.

Zunächst müssen wir bemerken, daſs Abû'l Ḥaṣan nicht etwa, wie Abû'l Wafâ oder Dschâbir, seine trigonometrischen Lehren den Anwendungen auf die Astronomie voranstellt, oder sie mit Beweisen versieht, sondern er führt, wie die übrigen Astronomen, seine Sätze beweislos und erst dann an, wenn er sie nötig hat. Auſser dem Sinus und Sinus versus, den er auch Pfeil (saḥem) nennt[1]), hat er eigene Bezeichnungen für $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$, nämlich „dschîb temâm" und für $\sin(\alpha - 90^0) = -\cos\alpha$, „dschîb fadhal", Bezeichnungen, die jedenfalls auch schon seinen Vorgängern zukommen. Auſser den Sinustafeln, die er nach der Manier des Ptolemäus für $r = 60^p$ von $\frac{1}{2}^0$ zu $\frac{1}{2}^0$ berechnet, gibt er auch eine Tafel für die Sinus versus und auſserdem eine solche für Arcussinus[2]), die er die Tafel des Al-Chwarizmî nennt[3]); sie liefert die Bögen von 0^0 bis 60^0. Für seine im 2. Bande entwickelten graphischen Methoden, welche er hauptsächlich im Auge hat, genügen diese Tabellen vollständig.

Bei Bestimmung der Sonnenhöhe führt er an, daſs man das Gnomon entweder in 12 Finger[4]), in $6\frac{2}{3}$ Fuſs oder in 60^p teile; die erstere Einteilung setzt er bei Konstruktion einer Tabelle voraus[5]), welche zu den „horizontalen Schatten" (Cotangenten) die Winkel gibt, also eine Arcuscotangenten-Tabelle ist. Hier laufen die Schattenlängen in ganzen Zahlen von 1 bis 140 Finger[6]), während die Winkel in Graden und Minuten angegeben werden. An diese Tafel schlieſst sich aber eine andere an, welche für $r = 60^p$ die „vertikalen Schatten", d. h. die Tangenten von Grad zu Grad gibt und zwar in partes, Minuten und Sekunden. Auch werden diese Schattentafeln von Abû'l Ḥaṣan ebenso zu trigonometrischen Rechnungen verwendet, wie dies Abû'l Wafâ eingeführt hatte.

Was die eigentlichen trigonometrischen Methoden anlangt, die er verwendet, so kennt er natürlich die 5 Fundamentalgleichungen des rechtwinkligen sphärischen Dreieckes und benützt sie ähnlich wie seine Vorgänger, indem er nur die Tangenten und Cotangenten häufiger in Anspruch nimmt. Aber er operiert auch mit der Pro-

---

1) Diese Bezeichnung kommt auch sonst vor; so z. B. schon bei Al-Chwarizmî. Übersetzung des geometrischen Teiles seines Werkes von A. Marre. Nouvelles Annales V. 1846. 562. Im Mittelalter findet sie sich sehr häufig und wird in späteren Schriften „saracenisch" genannt, z. B. im Opus Palatinum de triangulis von G. J. Rhaeticus, 1596. p. 90. — 2) A. a. O. I. 120. — 3) Es ist dies die schon S. 49. Anm. 2 zitierte Tafel. — 4) Über die Maſse der Araber vergleiche: Reinaud, Géographie d'Aboulféda I. Einleitung p. 264. — 5) A. a. O. 168—170. — 6) 140 Finger entsprechen einer Höhe von $4^0\,54'$ (genauer $4^0\,53'\,59{,}9''$).

jektionsmethode, indem er Stundenwinkel, Sonnenhöhe, Azimut u. s. w. ähnlich wie Al-Battâni und Ibn Jûnos durch Regeln bestimmt, die wir heute alle aus dem Cosinussatze ableiten würden[1]). Dessenungeachtet können wir dem Schlusse nicht zustimmen, den Delambre[2]) hieraus zieht, indem er sagt, dafs das beständige Auftreten der Cosinusformel in seinen Rechnungen beweise, dafs die Araber auch diesen Hauptsatz der Trigonometrie kannten. Denn gerade der verschiedenartige Aufbau und die wechselnde Gestalt der Sätze, von denen sich manche schon ganz in derselben Weise bei Al-Battâni finden, beweist unumstöfslich, dafs auch Ḥaṣan dieselben wie seine Vorgänger für jeden einzelnen Fall aus der Figur ableitete und keine gemeinsame Quelle kannte, aus der sie sich alle schöpfen liefsen.

Der zweite Band von Abû'l Ḥaṣan's Werk, welcher die graphischen Methoden darstellt, mit denen er die verschiedensten astronomischen Probleme löst, beruht ganz auf dem Analemma des Ptolemäus, oder der Projektionsmethode, zeigt aber, wie fruchtbringend die Araber dieses Verfahren auszubauen verstanden haben, und namentlich sind die ausgedehnten Anwendungen auf die Konstruktion der Sonnenuhren für die Geschichte der Gnomonik von hohem Interesse. Überhaupt spielten graphische Konstruktionen, die namentlich auch zur Verfertigung der Planisphärien, Astrolabien und Quadranten dienten, bei den Arabern eine grofse Rolle, da dieselben eine besondere Vorliebe für dergleichen Hilfsmittel hatten. Einige solcher Astrolabien, die von grofser Kunst der Ausführung zeugen, sind noch im Original erhalten[3]); ihre Einrichtung aber lernen wir aufs genaueste aus den Schriften Alfons' X. von Kastilien kennen[4]), der in der Konstruktion der verschiedenartigen astronomischen Instrumente ganz auf den Schultern der Westaraber steht. Da jedoch diese praktischen Verwendungen graphischer Methoden aufserhalb des Planes unseres Werkes liegen, so müssen wir verzichten, auf die Analyse des zweiten Teiles von Abû'l Ḥaṣan's Werk näher einzugehen.

Des Marokkaners Schrift ist die letzte, welche uns Nachricht gibt von den trigonometrischen Kenntnissen der Westaraber, und es scheint, dafs dieselben kein dem Werke des Naṣîr Eddîn ebenbürtiges an die Seite zu stellen hatten, wenn sie auch im Allgemeinen

---

1) Diese Sätze stehen in den Kapiteln 41—65 des I. Bandes. — 2) Delambre, Hist. de l'Astr. du moyen âge 187. — 3) Vgl. hierüber Sédillot, Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux p. 338—357 und die Litteraturangaben bei Wolf, Geschichte der Astronomie. München 1877. p. 165. Anmerk. 6. — 4) Libros del saber III.

im Besitze derselben Methoden wie jene waren. Da nun aber auf ihrem Wissen hauptsächlich das des christlichen Mittelalters bis herein in die erste Zeit des Wiederaufblühens der Wissenschaften in Europa beruht, so werden wir sehen, dafs es noch geraume Zeit dauerte, bis die abendländischen Gelehrten sich zu den Kenntnissen aufschwangen, wie sie Naṣîr Eddîn längst besessen hatte.

6. Kapitel.

Das christliche Mittelalter.

§ 1. Die Lateiner vom 5. bis zum 12. Jahrhundert. Die Griechen in Byzanz.

Während die astronomischen und in ihrer Begleitung die trigonometrischen Kenntnisse der asiatischen Völker, wie die vorhergehende Schilderung zeigte, aus dem fruchtbaren Erdreiche der griechischen und indischen Wissenschaft emporgewachsen waren und sich durch intensive Pflege zu einer kräftigen Pflanze entfaltet hatten, sahen wir schon im dritten Paragraphen des zweiten Kapitels, dafs die idealen griechischen Wissenschaften bei den nur auf das Praktische bedachten Römern keinen Boden fanden. In der That zeigen auch die geodätischen Schriften der römischen Feldmesser, ja selbst die griechisch geschriebenen Kesten des Sextus Julius Africanus (der also wahrscheinlich ein Grieche war), dafs man sich bei Höhen- und Distanzmessungen noch immer der einfachsten geometrischen Beziehungen bediente[1]), ohne die feineren trigonometrischen Rechnungen zu Rate zu ziehen. Für die Astronomie aber, an der ja bei den Griechen und den Völkern des Orients unsere Wissenschaft herangewachsen war, konnten die Römer sich nur insoweit begeistern, als sie ihnen zur Kalenderberechnung notwendig war.

Als dann das morsche Römerreich unter dem Ansturme der germanischen Völker zusammengebrochen war, da konnte erst recht von einer Pflege der Astronomie, wie überhaupt der Wissenschaften, keine Rede sein, da sie ja alle des ruhigen Friedens, wie der Gunst

1) Sextus lebte um die Zeit des Kaisers Alexander Severus, der 220 bis 238 regierte. Näheres über sein Werk bei Cantor I. 409—411. Der Text der Kesten (κέστα = Aneinandergeheftetes) ist von Vincent mit französischer Übersetzung herausgegeben in Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque impériale, XIX. Partie 2. Paris 1858. 407—415. Hier führt Vincent auch noch verschiedene Messungen an, die in einem anonymen Manuscript enthalten sind; auch sie bedienen sich nur der geometrischen Ähnlichkeit.

und des Schutzes vermögender Herrscher bedürfen. Erst als unter der Herrschaft der Goten im Jahre 529 zu Monte Casino bei Neapel der Orden der Benediktiner gestiftet worden war, begann wieder eine wenigstens erhaltende Thätigkeit, indem alte Handschriften gesammelt und Abschriften von ihnen gefertigt wurden, welche der wissenschaftlichen Entwickelung späterer Zeiten zugute kamen.

Magnus Aurelius Cassiodorius Senator[1]) (475—570), der Minister und treue Freund Theoderich des Grofsen, der sich selbst nach der Einnahme Ravenna's durch den byzantinischen Feldherrn Belisar in ein Kloster in Süditalien zurückzog, unterstützte diese Thätigkeit auf das lebhafteste, indem er sogar eigene Lampen für die Nachtarbeit konstruierte. Ein etwas jüngerer Zeitgenosse von ihm war Anicius Manlius Severinus Boethius[2]) (480 oder 482—524), der aus einer der angesehensten römischen Patrizierfamilien stammte, und eine hervorragende Rolle im politischen Leben spielte. Er hatte sich vorzugsweise an griechischen Schriftstellern gebildet, die wichtigsten mathematischen Autoren derselben, wie Euklid, Nikomachus, Ptolemäus, Archimedes und andere ins Lateinische übertragen[3]) und selbst 8 Bücher über Astronomie[4]), über Geometrie und anderes verfafst. Leider ist diese Astronomie, die noch 1515 vorhanden gewesen[5]), seither verloren gegangen; sie könnte uns Aufschlufs darüber geben, ob in unserer Wissenschaft noch andere als des Ptolemäus Methoden im lateinischen Mittelalter im Gebrauche waren, denn dieses stand vorzugsweise unter dem Einflusse der Werke des Boethius. Allerdings ist, nach seinen sonstigen Arbeiten zu schliefsen, eine originelle Fortbildung der griechischen Methoden, wie sie später die Araber leisteten, von seiner Seite nicht anzunehmen, es würden sich sonst auch sicher Spuren davon im Zeitalter der Renaissance vorfinden, was durchaus nicht der Fall ist. Boethius war es, der das Wort Quadruvium für die 4 Wissenschaften Arithmetik, Musik, Geometrie und Astronomie einführte, eine Bezeichnung, die sich, in die Klosterschulen des Mittelalters aufgenommen, durch Jahrhunderte hindurch forterbte und mit dem Trivium: Grammatik, Rhetorik und Dialektik, verbunden die sieben freien Künste der Artistenfakultät an den späteren Universitäten umfafste. Wir haben des Boethius hier nur deshalb gedacht, weil seine Übersetzungen und eigenen Werke bis zu einem gewissen Grade die Kenntnis der Mathematik in das Mittelalter hin-

1) Vgl. Cantor I. 529 ff. — 2) Cantor I. 533 ff. — 3) Cassiodorius, Varia I. 45. — 4) Cantor, Annali di matematica da Tortolini IV. 1861. 256. — 5) M. Curtze, Bulletino di Bibliografia e di Storia da Boncompagni I. 140.

überretteten und zweifelsohne von grofsem Einflufs auf die Fortexistenz der exakten Wissenschaften in jener Zeit waren, in einer Zeit, die vor lauter politischen Wirren und theologischen Fragen nur spärliche Mufse fand, sich mit ihnen zu beschäftigen.

Ebensowenig wie zu Boethius' Zeiten kann von einer selbständigen Fortentwickelung der Trigonometrie aus der Methode des Ptolemäus in den folgenden 5 Jahrhunderten die Rede sein. Denn wenn auch Männer, wie der gelehrte Beda venerabilis (672—735) aus England und dessen Landsmann, der berühmte Alcuin (736—804), der seit 782 an Karl's des Grofsen Hofe lebte und für Hebung des Schulwesens und Bildung des Klerus im Reiche seines Fürsten viel gethan hat, sich persönlich mit Geometrie und Astronomie beschäftigten, und wenn diese Wissenschaften mit Einführung des Quadruviums auch in den Kloster- und Privatschulen gelehrt wurden, so meldet doch keine von allen Nachrichten aus dieser Zeit auch nur einen nennenswerten Fortschritt in wissenschaftlicher Hinsicht.

Was speziell die Trigonometrie anlangt, so haben wir selbst aus dem 10. Jahrhundert noch keine Kunde, welche auf ihre Verwendung zu astronomischen oder geodätischen Berechnungen hinwiese; ja selbst ein Mann wie der berühmte Gerbert[1]) (nachmals Papst Sylvester II. † 1003), dem doch die Hebung wissenschaftlicher Studien in jener Zeit soviel verdankt, bedient sich in seiner praktischen Geometrie nur der einfachsten geometrischen Beziehungen[2]). Auch bei dem Astrolabium, dessen Rückseite mit einem geteilten Quadrate versehen war, und dessen sich Gerbert zur Höhenmessung bedient[3]), kennt er die arabische Bezeichnung „umbra recta" und „umbra versa", also unsere Tangente und Cotangente nicht[4]). Der Grund hierfür liegt darin, dafs eben damals die Methoden der Araber noch wenig oder gar keinen Eingang in das christliche Abendland gefunden hatten, und speziell hatte Gerbert nicht die mindeste Kenntnis von arabischer Wissenschaft[5]).

---

1) Cantor, Artikel über Gerbert I_{2}. 797—824. — 2) Cantor a. a. O. p. 812. — 3) Olleris Oeuvres de Gerbert. Paris 1867 in 4°. Cap. XVII u. XVIII. 429—430. — 4) Vgl. hierüber M. Curtze, Über die im Mittelalter zur Feldmessung benützten Instrumente; Bibliotheca mathematica 1896. 67. — Noch weniger als beim Astrolabium findet sich beim Gebrauche seines „Quadratum geometricum" (Cap. XXXIII a. a. O.) eine Verwendung der trigonometrischen Funktionen. Wir werden dieses Mefsinstrument weiter unten bei Peurbach beschreiben, durch den es zuerst für die Trigonometrie von Interesse geworden. — 5) Die Erzählung, als habe Gerbert bei den spanischen Arabern Studien gemacht, hat M. Cantor durch seine gründlichen Untersuchungen längst als unrichtig nachgewiesen. Vgl. den oben zitierten Abschnitt über Gerbert in der Geschichte der Mathematik von Cantor.

So blieb es auch noch im nächsten Jahrhundert, soweit wenigstens unsere allerdings sehr spärlichen Kenntnisse über jene Zeit reichen, indem wir nur von dem Vorhandensein einer einzigen lateinischen Übersetzung eines astronomischen Werkes[1]) der Araber berichten können, das übrigens auch noch näherer Untersuchung harrt.

Erst im 12. Jahrhundert, als die Macht der Christen in Spanien allmählich erstarkt war, und die Herrschaft des Islam sich daselbst seinem Ende zuneigte, fand teils dadurch, dafs sich christliche Gelehrte nach dem den Arabern bereits entrissenen Toledo begaben und sich mit den Überresten der arabischen Litteratur bekannt machten, teils durch gelehrte Juden[2]), die sich — zerstreut über das weite arabische Weltreich — schon frühe mit Sprache und Litteratur ihrer Unterdrücker bekannt gemacht hatten und sich intensiv mit mathematischen Studien beschäftigten, eine solche Übertragung der fremden Elemente in die christlichen Länder statt. Um aber die Darstellung dieses Überganges arabischer Wissenschaft und speziell arabischer Trigonometrie an das Abendland später nicht unterbrechen zu müssen, wenden wir unsere Blicke zunächst nach dem Osten. Unsere wenigen Kenntnisse über die Einführung und Pflege der Mathematik in der dortigen Metropole der Kultur, in Byzanz, lassen sich nämlich in ziemlicher Kürze darstellen.

Schon früher (Kap. 1, § 3) haben wir dem Niedergang der mathematischen Studien in den von Griechen bewohnten Gegenden des Ostens einige Worte gewidmet und erwähnt, dafs dieselben, selbst als Konstantinopel ein neues Kulturzentrum geworden war, nur ein kümmerliches Dasein fristeten. In der That zeigen Schriften, wie die geodätische Abhandlung des Byzantiners Heron, welche um 938 in Konstantinopel entstand[3]) und sich ganz an den Alexandriner Heron anschliefst, nur, dafs die Kenntnis griechischer Wissenschaft damals noch nicht ganz erloschen war. Schlimmer noch wurde es infolge der fortwährenden politischen Umwälzungen in den nächsten zwei Jahrhunderten, aus denen wir nur einen Kommentar des Johannes Tzetzes (um 1110 in Konstantinopel geboren, zwischen

---

1) M. Curtze, Monatshefte der Mathematik. VIII. Jahrgang. 1897. 223. — 2) Vgl. Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie. Halle 1865. I. 153 ff. und die vielen Arbeiten von M. Steinschneider, speziell: Abraham Judaeus-Savasorda und Ibn Esra. Zeitschr. für Math u. Phys. 12. 1—44, sowie seine Artikel „Die Mathematik bei den Juden" in Bibliotheca math. von G. Eneström. 1893—1898; im Speziellen: 1893. 68. — 3) Vgl. hierüber Cantor I_2 471—472. Der Name Heron ist nicht sichergestellt, Cantor nennt ihn daher den „Feldmesser von Byzanz". Seine Schrift hat Vincent a. a. O. (S. 86. Anm. 1) veröffentlicht.

1180 und 1185 gestorben) zum Almagest des Ptolemäus zu erwähnen haben[1]), über den uns jedoch nähere Kenntnisse fehlen.

Im Jahre 1284 eroberte das Kreuzheer der Lateiner Byzanz und legte die halbe Stadt in Asche, worauf in Konstantinopel ein lateinisches Kaisertum entstand, dem erst 1261 Michael Paläologus, ein eingeborener Fürst, der mit Hilfe der Genuesen zurückkehrte, ein Ende bereitete und die Dynastie der Paläologen begründete. Unter ihnen kam mit der wiederkehrenden Ruhe ein Wiedererwachen der mathematisch-astronomischen Wissenschaften zustande, indem sich in dieser Zeit „eines der merkwürdigsten Beispiele litterarischer Rückwanderung" ereignete: die Griechen lernten nämlich gegen Ende des 13. Jahrhunderts die wissenschaftlichen Leistungen ihrer Vorfahren erst wieder aus persisch-arabischen Quellen kennen. Dafs dabei auch viel der Litteratur der Orientalen Eigentümliches, so namentlich die Umgestaltung, welche die Trigonometrie der Griechen in der Hand jener gefunden hatte, mit herüber kam, dürfte wohl als selbstverständlich zu erachten sein. Allerdings läfst uns der Umstand, dafs die noch vorhandenen astronomischen Werke der Byzantiner nach dieser Richtung bis jetzt in keiner Weise durchforscht sind, einen direkten Beweis hierfür nicht erbringen. Es bleibt uns daher nichts weiter übrig, als diejenigen Männer zu nennen, durch welche dieser vermittelnde Übergang stattfand und jene Werke anzuführen, welche eine genauere Untersuchung verdienten, um die berührte Lücke in unseren Kenntnissen auszufüllen.

Das älteste und zugleich bedeutendste Werk, welches persische Astronomie den Byzantinern vermittelte, ist die „*Περσική ἀστρονομίας σύνταξις*" des Shamsaldîn von Bukhara, welches 1323 von einem Unbekannten ins Griechische übersetzt wurde[2]). Weiter übertrug astronomische Schriften aus dem Persischen am Ende des 13. oder Anfang des 14. Jahrhunderts der Grieche Chioniades von Konstantinopel, der sich längere Zeit Studien halber in Persien aufgehalten hatte. Ihm folgen Georgios Chrysokokkes um 1346, welcher mit Hilfe der von Chioniades gesammelten Bücher in die persische Litteratur eindrang[3]), und der Mönch Isaak Argyros, der

1) Cod. Paris. gr. 2162 fol. 210—232^{v}; Krumbacher, Geschichte der byzantinischen Litteratur. 2. Aufl. München 1897. 535. 2. — 2) Usener, Ad historiam astronomiae symbolae. Bonner Universitätsprogramm 1876. 15,d und 21 ff. — Cod. Laurentianus plutei 28. 17 (Florenz). Auch scheint eine Schrift über das Astrolabium von ihm zu stammen. Cod. Venet. Marcianus Gr. 309. — Die Schrift von Usener ist die vorzüglichste Quelle byzantinischer Litteratur aus jener Zeit. Vgl. daselbst die Angaben über die noch erhaltenen Handschriften. — 3) Krumbacher a. a. O. 622 und Montucla, Histoire I. 345.

ebenfalls mehrere auf der Astronomie der Perser beruhende Schriften verfaſste[1]). Von ihm teilt Montucla mit[2]), daſs er eine Geodäsie und eine Abhandlung über die Reduktion nichtrechtwinkliger Dreiecke auf rechtwinklige geschrieben habe, die aber handschriftlich blieben. Das umfangreichste und gelehrteste Werk aus jener Periode aber ist die *Ἀστρονομικὴ τρίβιβλος* des Theodoros Meliteniota, der um 1361 schrieb[3]). Usener machte a. a. O. p. 8 ff. verschiedene Mitteilungen aus der von ihm im Cod. Vatic. 1059 aufgefundenen vollständigen Handschrift desselben, die aber leider nichts auf unsere Wissenschaft Bezügliches angeben, obwohl für uns kein Zweifel besteht, daſs sich ein Sachverständiger aus diesem die ganze byzantinische Astronomie umfassenden Werke vollständig über die damals bekannte Trigonometrie informieren könnte.

Schon vor Meliteniotes hatten einige byzantinische Gelehrte auf die griechischen Originalquellen selbst zurückgegriffen, und Theodoros Metochites, Nikephorus Gregoras und Nikolaos Kabasilas studierten sie eifrig, namentlich aber machte sich letzterer mit dem Originalwerk des Ptolemäus vertraut[4]). Dadurch wurde der Grund zur Wiedergeburt der griechischen Wissenschaft im Abendlande gelegt, die sich zu vollziehen begann, als nach der Eroberung Konstantinopels durch die Türken im Jahre 1453 griechische Gelehrte in groſser Zahl mit ihren Schätzen nach Italien flüchteten.

Wir haben hier die bedeutendsten astronomischen Schriftsteller unter den byzantinischen Gelehrten angeführt, weil aus ihren noch gröſstenteils handschriftlich erhaltenen Werken sich mindestens der Stand trigonometrischer Kenntnisse in jener Zeit im Osten fol-

1) Usener nennt a. a. O. 24 von ihm: *Παράδοσις εἰς τοὺς Περσικοὺς προχείρους κανόνας τῆς ἀστρονομίας*, ferner eine *Πραγματεία νέων κανονίων συνοδικῶν τε καὶ πανσεληνιακῶν*, ferner eine Schrift zur Herstellung von Astrolabien und Scholien zu Ptolemäus (a. a. O. 4 und 5). — 2) Montucla, Histoire des mathém. I. Paris an VII. 345. — 3) Usener a. a. O. 6. Dasselbe nimmt in dem oben angeführten Vatikanischen Codex 220 Folioseiten ein. Usener sagt von Theodoros p. 8: „Ptolemaei disciplinae institutionum Persarum adjunxit"; ferner führt er eine Reihe arabisch-persischer Astronomen an, die in dem Werke des Theodoros genannt sind, darunter befinden sich Al-Battâni, Shamsaldîn, Al-Zarkâli und Naṣir Eddîn-al-Ṭûsi, und da Theodoros selbst sagt, daſs er die arabisch-persische Wissenschaft nur aus griechischen Übersetzungen kenne, so scheinen damals ziemlich viele jener Werke ins Griechische übersetzt gewesen zu sein. — 4) Krumbacher a. a. O. 623. — Über die astronomischen Schriften des Gregoras vgl. Boivinus in Nicephori Gregorae ed. Bonn. t. I. p. XLVII ff. — Kabasilas, Erzbischof von Thessalonich schrieb um die Mitte des 14. Jahrhunderts.

gern lassen dürfte, während die wenigen mathematischen Schriftsteller, von denen wir Kunde haben, sich mit geometrischen und zahlentheoretischen Dingen beschäftigten und für uns somit nicht in Betracht kommen[1]).

§ 2. Einführung der arabischen Trigonometrie im Abendlande.

Während wir bis zum 12. Jahrhundert kaum eine Spur trigonometrischer Kenntnisse seit den Zeiten des alten Hellenentums im Abendlande nachzuweisen vermochten, wurde dies mit dem Aufblühen der christlichen Herrschaft in Spanien allmählich anders. Schon um die Mitte des 12. Jahrhunderts war in dem den Moslem bereits entrissenen Toledo eine förmliche Übersetzerschule vorhanden[2]), die es sich unter der geistigen Leitung des Erzbischofes Raimund (zwischen 1130 und 1150) zur Aufgabe machte, die wissenschaftlichen Schätze der Araber den Lateinern zugänglich zu machen. Aus dieser Schule sind vor Allen zu nennen Dominicus Gondisalvi und der jüdische Gelehrte Johannes von Luna (später als Christ von 1135 bis 1153 schriftstellerisch thätig), gewöhnlich Johannes Hispalensis oder auch Johann von Sevilla genannt. Ihm verdanken wir eine lateinische Version der Planeten- und Sterntheorie des uns schon bekannten Al-Fergâni, sowie mehrerer anderer astronomischer und astrologischer Werke der Araber, Übersetzungen, die noch handschriftlich erhalten sind[3]). In Toledo aber entfaltete damals auch der schon wiederholt genannte Astronom Gerhard von Cremona (1114—1187), welcher von dem Hohenstaufen Friedrich Barbarossa unterstützt wurde, eine umfassende übersetzerische Thätigkeit. 76 Werke[4]), darunter der Almagest des Ptolemäus[5]), die Canones des Al-Zarkâli über die Toledanischen Tafeln, das Werk des Dschâbir ibn Aflaḥ, die Sphärik des Menelaus, Tâbit's oft erwähnte Schrift und andere, von denen teilweise noch zahlreiche handschriftliche Exemplare vorhanden sind, wurden von ihm ins Latei-

1) Bezüglich des Byzantiners Georgios Amirucius aus dem 15. Jahrhundert verweisen wir auf später. — 2) Cantor I_{2}. 751. — 3) Vgl. Wüstenfeld, Die Übersetzungen arabischer Werke ins Lateinische. Abhandl. der k. Gesellsch. der W. zu Göttingen XXII. 1877. 27 ff. und besonders Steinschneider, Die Mathematik bei den Juden. Bibliotheca math. 1896. 79—80. — 4) Wüstenfeld ebenda 55 ff. und Boncompagni, Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese etc. Atti dell' Accademia dei nuovi Lincei. 1851. IV. — 5) Wegen des Almagest' hatte sich Gerhard nach Toledo begeben, 1175 vollendete er seine Übersetzung nach einer arabischen Version desselben; die lateinische Übersetzung des Boethius, die nach einer griechischen Handschrift gefertigt war, scheint also damals schon verschollen gewesen zu sein.

nische übertragen und so der Nachwelt aufbewahrt. In jene Zeit gehört auch der uns schon bekannte Plato von Tivoli[1]), der das Abendland unter Anderem mit dem arabischen Ptolemäus, Al-Battâni, sowie mit der Sphärik des Theodosius bekannt machte. Er hielt sich um das Jahr 1136 in Barzelona auf, in welcher Zeit daselbst auch der gelehrte Jude Abraham bar Chijja[2]) weilte. Dieser trat nicht nur als Übersetzer, sondern auch als selbständiger Autor auf, indem er eine Astronomie und astronomische Geographie in 10 Pforten (Abschnitten), sowie ein Buch über praktische Geometrie in hebräischer Sprache mit dem Titel „Chibbur ha-Meschicha we-ha-Tischboret" für die Juden in Zerfat (Frankreich) verfafste, wo er sich eine Zeit lang aufhielt. Steinschneider hat nachgewiesen, dafs dieses Werk mit dem von Plato von Tivoli ins Lateinische übersetzten „Liber Embadorum" des Juden Abraham-Savasorda identisch ist; Abraham bar Chijja und Savasorda sind also Namen desselben Gelehrten[3]). Das Werk zerfällt in 4 Pforten und enthält Vorschriften zur Feldmessung, „da die Juden in Frankreich bei der Teilung von Äckern und dgl. unwissenschaftlich verfuhren und von einem vermeintlich fromm-konservativen Standpunkt aus eine wissenschaftliche Belehrung zurückwiesen". Für uns von besonderem Interesse ist eine im 4. Teile enthaltene kleine Sehnentafel[4]), die für den Radius $r = 14$ in der Weise berechnet ist, dafs die Sehnen in ganzen Zahlen von 1 bis $28 = 2r$ fortschreiten und nebenstehend die ihnen entsprechenden Bögen im Längenmafse angegeben sind, dabei ist $\pi = 3\frac{1}{7}$ und die Teilung eine sexagesimale.

Der hervorragendste jüdische Gelehrte jener Zeit war Abraham ibn Esra[5]), der in Toledo geboren ward, von 1093 oder 1096 bis 1167 lebte und ein unstätes Wanderleben führte: er bereiste Italien, Ägypten, Frankreich und England und hat eine Menge theologischer und mathematischer Schriften verfafst. Die letzteren sind für die Geschichte der Arithmetik wichtiger als für uns, doch heben wir die

1) B. Boncompagni, Delle versioni fatte da Platone Tiburtino traduttore del secolo duodecimo. Atti dell' Acc. dei nuovi Lincei IV. 1851. — 2) M. Steinschneider, Abraham Judaeus-Savasorda und Ibn Esra. Zeitschr. für Math. und Phys. XII. 1—44 und X. 494. — 3) Araham bar Chijja und Plato scheinen in enger Beziehung gestanden zu sein, wahrscheinlich diente ersterer dem letzteren als Dolmetscher aus dem Arabischen. Steinschneider, Bibl. math. 1896. 34 und 37. — 4) Dieselbe erwähnte schon Libri, Hist. des sciences mathé. en Italie II. 482 und Steinschneider a. a. O. 20. — Herr M. Kutta hatte die Güte, dieselbe für mich in der Münchener hebräischen Handschrift Cod. hebr. 299 nachzusehen; ihm verdanke ich die obigen Angaben. — 5) M. Steinschneider in den Abhandlungen zur Gesch. der Mathem. 3. Heft 1880. 59—128.

verschiedenen Werte, die er für die Zahl π mitteilt, heraus. Im 6. Kapitel seiner Schrift „ha-Schem", d. h. Buch vom Namen, erwähnt er sowohl den Wert des Ptolemäus, als den des Archimedes und gibt als indischen Wert[1]) $3^p\,8'\,44''\,12''' = \frac{56631}{18000} = 3{,}1456\ldots$ an, der übrigens mit jenen Werten nicht stimmt, die wir bei Âryabhâṭa fanden (S. 36). Das gleiche gilt von dem Werte $\frac{62832}{20000}$, den er in seiner Arithmetik anführt, die den Titel „Jesod ha-Mispar", d. i. Buch der Zahl, führt[2]). Da ibn Esra's astronomische Schriften gröfstenteils astrologischer Natur sind, so haben sie für uns keine Bedeutung, nur die „astronomischen Tabellen", welche aus dem Jahre 1145 (?) stammen, könnten möglicherweise eine Sinus- oder Sehnentafel enthalten; hierüber fehlt uns aber jede Nachricht. Das Gleiche gilt von einem „geachteten wichtigen" astronomischen Werke des Juden Abraham ben Daûd, der um 1160—1180 in Toledo lebte[3]). Steinschneider nennt in seinen Artikeln über die Mathematik bei den Juden[4]) noch verschiedene Gelehrte, die sich in jener Zeit teils mit Übersetzungen, teils mit Abfassung selbständiger astronomischer Schriften befafsten. Da ihre Werke aber nicht näher untersucht sind, können wir über ihren etwaigen trigonometrischen Gehalt nichts mitteilen, versprechen uns übrigens von ihrer Durchsicht auch keine besonders wichtigen Ergebnisse. Denn nach dem, was über die Arbeiten aus jener Zeitepoche bisher bekannt wurde, beruhen sie lediglich auf Reproduktion der Wissenschaft der spanischen Araber, zu deren Verbreitung die Juden allerdings viel beigetragen haben.

Einer der ersten, vielleicht der erste Übersetzer arabischer Schriften (zwischen 1120 und 1130), der sich seine Kenntnisse der orientalischen Sprachen auf weiten, absichtlich zu wissenschaftlichen Zwecken unternommenen Reisen in Kleinasien, Ägypten und Spanien erwarb, war der Mönch Atelhart von Bath. Wie schon erwähnt, übertrug er die astronomischen Tafeln des Al-Chwarizmî ins Lateinische[5]), und diese noch handschriftlich existierende Übersetzung würde allerdings eine eingehende Durchsicht sicher lohnen, da sie einerseits den Einfluſs der indischen Astronomie und Trigonometrie auf die Entwickelung der entsprechenden arabischen Wissenschaften und andererseits den Fond trigonometrischer Kenntnisse beurteilen liefse, der durch sie dem Mittelalter zugänglich gemacht wurde.

Wir wissen, dafs bei den Arabern vielfach die auf der stereo-

---

1) A. a. O. 96—97. — 2) Ebenda 116. Hier ist auch die arabische Bezeichnung „Pfeil" für den Sinusversus verwendet. — 3) Steinschneider, Bibl. math. 1897. 73. Anm. *) und 1895. 97. — 4) Ebenda 1896. — 5) Siehe S. 48. Anm. 1. Atelhart war zwischen 1120 und 1130 wissenschaftlich thätig.

graphischen Projektion beruhenden Astrolabien im Gebrauche waren, deren Kenntnis sie dem Planisphärium des Ptolemäus verdankten. Nun hatte allerdings schon Hermann der Lahme (1013—1054) (Hermannus contractus), ein Mönch aus St. Gallen, eine Schrift über das Astrolabium verfafst[1]), aber mit dem Originalwerk des Ptolemäus scheint das lateinische Mittelalter doch erst durch Rudolph von Brügge bekannt geworden zu sein, der es 1144 aus einer arabischen Übersetzung ins Lateinische übertrug[2]); durch ihn wurde es der Nachwelt erhalten.

Wir haben nur die hervorragendsten Namen derjenigen angeführt, welche sich im 12. Jahrhundert um die Übertragung arabischer wissenschaftlicher Bildung in das Abendland verdient machten, können aber schon aus dem Wenigen entnehmen, dafs damals ein reges Streben herrschte, die in dem Strudel politischer und religiöser Kämpfe verloren gegangenen Kenntnisse in den exakten Wissenschaften an den neueröffneten Quellen arabischer Kultur wieder zu ergänzen. Vorerst war diese Thätigkeit allerdings nur eine rezeptive, doch schon im nächsten Jahrhundert sehen wir, wie die aufgenommenen Kenntnisse allmählich verarbeitet und praktisch verwendet wurden. Die wenigen Nachrichten, welche uns hierüber, speziell was die Trigonometrie anlangt, erhalten sind, wollen wir im folgenden Paragraphen zusammenstellen.

§ 3. Nachrichten über Trigonometrie aus dem 13. Jahrhundert.

Namentlich zwei Fürsten waren es in jener Zeit, bei welchen Astronomen und Mathematiker wohlgelitten waren: der grofse Hohenstaufe Friedrich II. (1212—1250) und Alfons X., der Weise von Kastilien. An dem Hofe des ersteren, der ein in Wissenschaften hochgebildeter und mit den Kenntnissen seiner Zeit wohlvertrauter Mann war, ja sogar in vielen Dingen derselben vorauseilte, wurde, wie damals allgemein üblich, die Astrologie mit besonderer Vorliebe betrieben, da ihr der Kaiser — in dieser Beziehung ein Kind seiner Zeit — leidenschaftlich ergeben war. Aber jene Männer, welche dem astrologischen Aberglauben ebenso, wie die berühmten Astronomen und Mathematiker der Araber huldigten, wie z. B. Friedrich's Hofastrolog, der Meister Michael Scotus (1190 geboren), die Philo-

1) Vgl. über ihn Cantor $I_{,2}$. 833 ff. und 809. — 2) M. Chasles, Geschichte der Geometrie 595—596. Das Werk des Rudolphus Brughensis wurde zum erstenmale 1507 gedruckt als Anhang der Geographie des Ptolemäus (Rom in fol.), dann 1536. 1558 gab dann Commandinus eine korrektere Übersetzung mit einem Kommentar heraus.

sophen Johannes von Palermo und Theodorus und andere, waren nebenbei in Astronomie und Mathematik wohlbewandert, indem sie sich ihre Kenntnisse teils aus den bereits vorhandenen Übersetzungen arabischer Werke, teils durch selbständige Anfertigung solcher verschafften. Ja sogar einzelne griechische Originale waren damals bereits wieder aufgefunden worden, und Friedrich II. liefs darnach die Übersetzungen aus dem Arabischen durch seine Gelehrten verbessern. Auf diese Weise entstand auch eine neue Ausgabe des Almagest, die noch in der Bibliothek zu Wolfenbüttel vorhanden ist[1]).

Es konnte nicht fehlen, dafs an Friedrich's Hofe auch der bedeutendste Mathematiker jener Zeit Leonardo Fibonacci aus Pisa erschien, der sich als Kaufmann auf weiten Handelsreisen mit der arabischen und indischen Mathematik vertraut gemacht hatte. Neben seinem berühmten für die Geschichte der Arithmetik und Algebra so wichtigen „Liber Abaci“[2]) verfafste er auch eine „Practica geometriae“, die er im Jahre 1220 einem gewissen Magister Dominicus widmete, der ihn zu ihrer Ausarbeitung veranlafst hatte. Dieses Werk ist nun aber wesentlich verschieden von den früheren Schriften gleichen Inhaltes. Während nämlich diese meistens nur Sammlungen von Regeln waren, die unmittelbar zu praktischem Gebrauche verwendet wurden, gibt Leonardo's Werk zu jenen Regeln auch die Ableitungen und Beweise, die teils direkt den Alten entnommen, teils ihren Methoden nachgebildet sind. Überhaupt scheint der theoretische Wert der Schrift, namentlich für jene Zeit, weit bedeutender als ihr praktischer, denn während eine Verwendung der angegebenen Methoden auf bestimmte praktische Beispiele nicht zu finden ist, sind wohl zum erstenmale die Mittel zur Anwendung trigonometrischer Methoden auf die Feldmefskunst in mathematischer Begründung mitgeteilt.

Leonardo's trigonometrische Kenntnisse sind im Allgemeinen dem „Tholomaeus“ (wie er schreibt) entnommen, wenn er auch den Sinus rectus und den Sinus versus definiert[3]), welch letzteren

---

1) Monatliche Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde von Zach XXVII. 192—193. Staatsminister Ende hat diesen Codex 1812 in Wolfenbüttel aufgefunden. Übrigens wurde auf Veranlassung Friedrich's II. der Almagest auch aus dem Arabischen von dem Juden Jakob Anatoli (1231 bis 1235) übersetzt. Steinschneider, Bibliotheca math. 1596. 110. No. 28. Ein anderer Jude, der 1247 an den Hof des Kaisers in Toscana kam, Jehuda ben Salomo Cohen aus Toledo, gab in einer grofsen von ihm verfafsten Encyklopädie „Midrasch ha Chochma“ ebenfalls eine Bearbeitung des Almagest und kam darin auf Dschâbir's Erklärung der „Figura sectoris“ zu sprechen: Steinschneider ebenda 111b. — 2) Cantor II. 1—32. — 3) Scritti di

er wie die Araber „Pfeil“ (sagitta) nennt[1]). Nachdem er die Halbierungsformel für die Sehne auf zwei verschiedene Arten abgeleitet hat, wovon die eine mit der Methode des Ptolemäus übereinstimmt, schliefst er, dafs man durch fortgesetzte Anwendung derselben aus einer gegebenen Sehne die Sehnen immer kleinerer Teile des zur ursprünglichen Sehne gehörigen Bogens finden kann, die dann schliefslich statt der Bögen gesetzt[2]), die Kenntnis des Bogens selbst vermitteln. Ferner zeigt er, wie man aus der Sehne den Pfeil und umgekehrt bestimmt, wenn der Radius des Kreises bekannt ist, und endlich, wie sich der letztere aus der Kenntnis von Sehne und Pfeil ableiten läfst. Hierauf teilt er eine Tafel mit[3]), „damit diejenigen, welche geometrisch (d. h. trigonometrisch) verfahren wollen, leichter als auf die angegebene Weise zu gegebenen Sehnen die entsprechenden Bögen finden können“. In derselben sind, wie bei Abraham bar Chijja, sowohl die Bögen, als auch die Sehnen im Längenmafse angegeben. Der Durchmesser beträgt 42 perticae (Mefsruten), und da $\pi = 3\frac{1}{7}$ gesetzt ist[4]), so ist der Umfang des Kreises 132 perticae. Nun sind in zwei Spalten der Tafel immer zwei zum ganzen Kreisumfang sich ergänzende Bögen nebeneinandergestellt, die nach ganzen pert. aufeinanderfolgen, und in weiteren 4 Spalten werden die perticae, pedes, unciae und puncta der zugehörigen Sehne angegeben. Dabei ist 1 pertica = 6 pedum = 108 unciarum = 2160 punctorum[5]).

Um aus dieser Tafel zu einer gegebenen Sehne den entsprechenden Bogen und umgekehrt zu finden, brauchte Leonardo natürlich ein Interpolationsverfahren, welches p. 98—99 auseinandergesetzt wird und auf dem Satze des Ptolemäus beruht (vgl. S. 21), dafs das Verhältnis zweier Bögen gröfser, als das ihrer Sehnen ist. Ist z. B. (Fig. 27) zu der Sehne $ei = 21^{\text{pert.}}\ 3^{\text{ped.}}\ 9^{\text{unc.}}$ der Bogen zu finden[6]), so gibt die Tafel für die beiden Sehnen, zwischen denen ei liegt, $21 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = ez =$ cord. arc. $22^{\text{pert.}}$ und $21 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 16 = et$ = cord. arc. $23^{\text{pert.}}$ Aber $\frac{\text{arc. } ez}{ez} < \frac{\text{arc. } ei}{ei}$, und hieraus arc. $ei > 22 \cdot 3 \cdot 12$; ferner $\frac{\text{arc. } ei}{ei} < \frac{\text{arc. } et}{et}$, also arc. $ei < 22 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 13$. Die halbe Differenz dieser beiden Werte: $0 \cdot 0 \cdot 5 \cdot 6{,}5$ zu dem kleineren Werte von

---

Leonardo Pisano da B. Boncompagni, Roma 1862. Vol. II. 94, wo es heifst: „. . . . ut in arte astrologia invenitur“.

1) Vgl. auch Los libros del Saber t. IV. 167, wo „saeta“ steht. — 2) A. a. O. 93: „et sic semper dividendo arcus ueniemus ad notitiam cordae cujus differentia ad suum arcum erit quasi insensibilis.“ — 3) A. a. O. p. 96. — 4) Übrigens findet Leonardo auch noch den genaueren Wert $\pi = 3{,}1418\ldots$, a. a. O. 87—90. — 5) Bezüglich des Mafses heifst es auf p. 3: „Quidam enim mensurare consueverunt agros cum mensuris cubitalibus, vel ulnis, aut cum passibus. Alij cum perticis, sive cum alio quolibet mensurabili instrumento.“ — 6) A. a. O. 98—99.

arc. ei addiert, gibt den gesuchten Bogen von 22 pert. 3 ped. 17 unc. 6 punct. („secundum propinquitatem"). Offenbar in dem Gefühle der Unsicherheit dieser Methode gibt er noch zwei andere, etwas bessere, aber umständlichere an. Die eine kommt darauf hinaus, dafs er

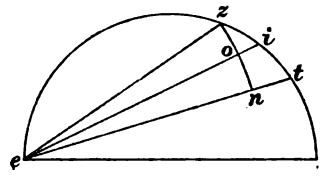


Fig. 27.

$$\text{arc. } ei = \frac{ei\,(\text{arc. } ez + \text{arc. } et)}{ez + et}$$

setzt, und in der zweiten bildet er $ei - ez = oi$, $et - ez = nt$ und berechnet arc. zi aus der Proportion: arc. zi : arc. $zt = oi : nt$. Für das obige Beispiel ergeben die beiden letzten Methoden das übereinstimmende Resultat arc. $ei = 22 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 6$ [1]). Merkwürdiger Weise macht nun aber Leonardo von dieser Tafel in seiner Practica geometriae gar keinen weiteren Gebrauch, sondern bedient sich nur jener geometrischen Methoden, die seit Heron dem Alexandriner bekannt waren.

Wie sehr übrigens der Pisaner durch die arabische Wissenschaft beeinflufst war, beweist der Umstand, dafs er sich zur Höhenmessung des von den Arabern vielfach benützten Quadranten bedient. Die Gestalt dieses Mefsinstrumentes zeigt Fig. 28. Die Seite des eingezeichneten Quadrates teilt Leonardo [2]) in 12 oder 60 Teile, bei e und g befinden sich zwei Diopter, durch die man nach der Spitze des zu messenden Gegenstandes entweder von e nach g visierte, wenn eine Höhe zu bestimmen war, oder von g nach e bei Längen- und Tiefenmessungen. Dabei stellte sich das Bleilot ge entweder auf einem der Teilstriche von hd oder von id ein und gab so im ersten Falle die Cotangente (umbra recta), im zweiten die Tangente (umbra versa) des Höhenwinkels, der am geteilten Kreise abgelesen werden konnte. Leonardo hat die Bezeichnung der „Schatten", die die Araber einführten, nicht, während sich dieselben in Handschriften einer Abhandlung des Robertus Anglicus von Montepessulano (Montpellier) finden [3]), die um das Jahr 1231, also nur wenig nach Leonardo's

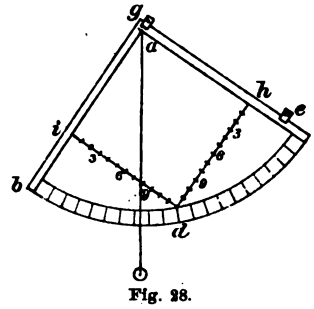


Fig. 28.

---

1) Die erste der drei Methoden kommt auf die Benützung der Formel $\text{arc. } ei = \frac{ei}{2}\left(\frac{\text{arc. } ez}{ez} + \frac{\text{arc. } et}{et}\right)$, die letzte auf die Formel $\text{arc. } ei = \{(et - ei)\,\text{arc. } ez + (ei - ez)\,\text{arc. } et\} : (et - ez)$ hinaus. — 2) Leonardo a. a. O. 204—206. — 3) P. Tannery, Le traité du quadrant de maître Robert Anglès. Notices et extraits de la bibl. nationale $35_{1/2}$, 1897 und Biblioth. math. 1897, 3—6, wo sich

Schrift verfafst sein dürfte. Bei Robertus findet sich auch die Gleichung, welche wir heute durch $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ ausdrücken, verwendet, um von einer geteilten Linie des Quadrats auf die andere überzugehen, die übrigens auch schon Hermannus Contractus im 12. Jahrhundert in seinem Astrolabium anwendet[1]). Aufserdem ist Robert's Quadrant auch für astronomische Zwecke eingerichtet. Überhaupt scheint man sich nach den Nachrichten, die P. Tannery gesammelt hat, schon seit dem 11. Jahrhundert des Quadranten, des auf ihm eingezeichneten Quadrates und auch des Astrolabiums sowohl zu feldmesserischen als zu astronomischen Zwecken im Occident bedient zu haben[2]).

Um dieselbe Zeit, da unter dem Hohenstaufen Friedrich die Wissenschaften in Italien eifrige Pflege fanden, wurden sie auch im Königreiche Castilien von einem ebenso freidenkenden, als thätigen Fürsten gefördert. Dort regierte seit dem Jahre 1223 Alfons X., ein Sohn der hohenstaufen'schen Königstochter Beatrix. Die Geschichte, die ihm den Beinamen „der Weise" gegeben, berichtet uns nicht nur von seinen hervorragenden Verdiensten um die Poesie und Sprache, um die Rechtswissenschaft und Geschichtskunde, sondern vor allem von seiner besonderen Vorliebe für die exakten Wissenschaften, in denen er auch persönlich sehr bewandert war. Bald nach seinem Regierungsantritt sammelte er einige christliche und jüdische Gelehrte in Toledo um sich und liefs von ihnen ein umfassendes Sammelwerk[3]) herstellen, das auser einem Auszug[4]) aus den astronomischen Tafeln, die den Namen der Alfonsinischen erhielten und durch Jahrhunderte im Ansehen standen, auch Schriften über astronomische Instrumente, wie sie die Araber mit besonderer Vorliebe gebrauchten, sowie über verschiedene Gattungen von Uhren enthielt. Die Leiter des ganzen Unternehmens scheinen der Rabbi Isak[5]) und der Arzt Jehuda ben Mose Cohen gewesen zu sein. Die meisten der von ihnen in den Jahren 1256—1277 hergestellten

---

die nötigen Litteraturangaben finden. Daselbst ist auch bemerkt, dafs ein gewisser Gullielmus Anglicus 1231 eine selbständige Abhandlung über die Saphäa des Arzachel schrieb (p. 583), die, wie wir wissen, auch das geometrische Quadrat enthielt.

1) Vgl. Curtze, Biblioth. math. 1896. 72. Anmerk. 14. — 2) Der oben erwähnte Gullielmus Anglicus spricht von dem Quadranten als etwas ganz Bekanntem. — 3) Manuel Rico y Sinobas: Libros del Saber de astronomia de Rey Alfons X. t. I—V. Madrid 1863—1867 fol. — 4) A. a. O. t. IV. — 5) Nach Steinscheider ist Rabiçag von Toledo identisch mit Isak ibn Sid (Biblioth. math. 1896. 112. No. 31) und scheint namentlich in der Herstellung der Armillarsphären, Astrolabien, Quadranten und der verschiedenen Gattungen von Uhren besonderes Geschick besessen zu haben, da er hierbei fortwährend erwähnt wird.

Bücher sind Übersetzungen in die castilische Landessprache, doch befinden sich dabei auch einige selbständige Arbeiten, bei deren Abfassung der König persönlich beteiligt war.

Die „Alfonsinischen Tafeln", welche im Auftrage des Königs in den Jahren 1262—1272 ausgearbeitet wurden[1]), bildeten im Occident das Fundament aller astronomischen Rechnungen bis ins 16. Jahrhundert[2]) herein und beruhen ganz auf den Kenntnissen der Westaraber, erreichen aber, wenigstens was die bei ihrer Herstellung verwendeten trigonometrischen Methoden anlangt, die Hakimitischen und Ilkhanischen Tafeln keineswegs. So finden wir z. B. im IV. Bande der „Libros del Saber" eine Sinustafel, die wie jene des Al-Battâni von $\frac{1}{2}^0$ zu $\frac{1}{2}^0$ fortschreitet und nur auf Minuten und Sekunden berechnet ist. Die zur Aufstellung derselben verwendeten Methoden sind völlig die des Ptolemäus[3]). Ferner enthalten sowohl Band III[4]), als Band IV[5]) je eine Schattentafel, die genau der Cotangententafel Al-Battâni's[6]) entspricht und für ein Gnomon von 12 Fingern (dedos) berechnet ist, aber so wenig wie von jenem Araber, zu trigonometrischen Rechnungen verwendet wird. Aufserdem scheint noch eine Tafel für den Sinus versus vorhanden gewesen zu sein, wenn sie sich auch in den „Fragmenten" nicht mehr findet[7]).

Wir sehen, dafs sich Alfons X. bei Herstellung seiner Schriften gelehrter Juden bediente. Diese treten überhaupt in jener Zeit als die hauptsächlichsten Überlieferer arabischer Wissenschaften auf, indem sie arabische Schriften teils ins Hebräische übersetzten, teils als Dolmetscher bei Herstellung lateinischer Versionen dienten und auch selbständige Werke verfafsten, welche sich auf dem Niveau der damals überkommenen Wissenschaft hielten. So verfafste 1230 der Jude David ibn Nahmias in Toledo einen Kommentar zum Almagest[8]), Moses ibn Tibbon, der 1245—1275 in der Provence lebte[9]), übersetzte das Werk des Dschâbir ibn Aflah ins Hebräische, und

---

1) A. a. O. IV. 109. — 2) Im V. B. pars 1 der Libros del Saber wird die vollständige Litteratur dieser Tafeln, die noch in einer Menge von Handschriften vorhanden sind, angegeben. Im Druck erschienen sie zuerst 1483. — 3) A. a. O. 163 ff. In den angehängten „Fragmentos numericos de las taulas Alfonsíes" 107 desselben Bandes wird auch von einer Sehnentafel gesprochen. — 4) A. a. O. 305 in „Libros del quadrante pora rectificar"; sie hat die Überschrift „Tabla de saber la altura de los dedos de la sombra conversa et la sombra por la altura" und ist für halbe Grade berechnet. — 5) A. a. O. 8. — 6) Al-Battâni wird auch mehrfach zitiert, so z. B. IV. 181, wo er Al Bateny heifst. — 7) Es heifst IV. 167, nachdem die Methoden zur Berechnung der „Pfeile" angegeben sind: „Et nos possiemos otrossí todas estas saetas en taula." — 8) Steinschneider, Biblioth. math. 1896. 110. — 9) Ebenda p. 111.

Jakob ben Machir Prophiat oder Prophatius aus Marseille[1]) gab Übersetzungen desselben Werkes, ebenso der Sphärik des Menelaus und diente wahrscheinlich als Dolmetscher bei der durch Johann von Brixen 1263 hergestellten lateinischen Übersetzung von Al-Zarkâli's Saphea[2]). Auch stammt von ihm eine kleine Abhandlung über die Sehnenrechnung des Ptolemäus.

Da wir keine allgemeine Geschichte der Mathematik schreiben, so kann es nicht unsere Aufgabe sein, alle die zahlreichen Übersetzer mathematischer Schriften aus jener Zeit aufzuführen, wohl aber müssen wir noch zwei Männer nennen, von denen wir einiges für unser spezielles Gebiet Interessante mitzuteilen haben. Der eine ist Wilhelm von Mörbecke, der in Ostflandern geboren war und weite Reisen, auch in Griechenland machte. Ihm verdankt das Abendland die Bekanntschaft mit dem Analemma des Ptolemäus, dessen Wichtigkeit für die Kenntnis der griechischen Trigonometrie wir früher schon hervorhoben[3]) (S. 11. Anmerk. 3). Allerdings scheint die Schrift später wieder in Vergessenheit geraten zu sein, bis sie Federigo Commandino 1562 abermals zu dauerndem Leben erweckte. Der zweite dieser beiden Männer ist der durch seine Euklidübersetzung bekannte Johannes Campanus von Novarra, der in der zweiten Hälfte des 13. Jahrhunderts thätig war[4]), doch interessiert uns hier nicht sowohl seine übersetzerische Thätigkeit, als die Bemerkung, welche ein Gelehrter des 16. Jahrhunderts Lucas Gauricus von ihm macht, indem er sagt, Campanus habe bereits eine „Tabula foecunda", d. h. eine Tangententafel aufgestellt. Er teilt dieselbe mit[5]), sie ist für alle Grade berechnet und läuft von 0^0 bis 45^0. Da man bisher glaubte, Regiomontan sei der erste gewesen, der im Abendlande eine solche gab, und da diese Tabelle offenbar für trigonometrischen Gebrauch eingerichtet war im Gegensatze zu den für das Gnomon von 12 partes berechneten Tafeln der Westaraber, wie wir sie auch in den Libros del Saber antrafen, so heben wir diese Notiz gebührend hervor, obwohl es uns nicht gelang in den uns zugänglichen Schriften des Campanus Näheres über die Tabelle zu finden.

---

1) Steinschneider, Die Mathematik bei den Juden. Biblioth. math. 1897. 35. — 2) Ebenda 35. — 3) Wilhelm von Mörbecke war 1268 bei Papst Clemens IV. in Viterbo, wo er seine Übersetzerkunst ausübte, wurde 1278 Erzbischof von Korinth und dürfte nicht lange nach 1281 gestorben sein (Cantor II. 89). Seine Schrift wurde wieder aufgefunden und neben dem griechischen Texte von J. L. Heiberg veröffentlicht. Abhandl. zur Geschichte der Mathematik Heft 7. 1895. p. 1—30. — 4) Vgl. über ihn Cantor II. 90. — 5) Lucas Gauricus (1476—1558) siehe weiter unten. — Opera 1575 fol. I. 1182 „tabula per Campanum Novariensem jamdiu supputata".

Aus den vorhergehenden Erörterungen sieht man, dafs am Ende des 13. Jahrhunderts das Abendland im Besitze der sämtlichen trigonometrischen Kenntnisse der Griechen und der Westaraber war, während ihm die ausgebildete Trigonometrie Abû'l Wafâ's und seiner Nachfolger fern blieb. Dafs hiermit nicht einmal die Höhe erreicht, geschweige denn überschritten wurde, zu welcher sich die arabisch-persische Wissenschaft in derselben Zeit im fernen Orient emporschwang, braucht kaum eigens betont zu werden.

Übrigens hatten die Kenntnisse der Westaraber damals nicht nur im christlichen Spanien, in Italien und in Frankreich Eingang gefunden, sondern auch in Deutschland treffen wir Spuren von ihr. In einem Manuscript der Münchener Bibliothek[1]) findet sich eine Abhandlung über Trigonometrie, die direkt auf die Araber und speziell auf Al-Zarkâli zurückzugehen scheint. Es wird daselbst der „Sinus rectus" sowohl als die halbe Sehne des doppelten Bogens, als auch als die Senkrechte von einem Endpunkte des Bogens auf den nach seinem anderen Endpunkt laufenden Durchmesser definiert, desgleichen ist der „Sinus versus" entweder definiert als jener Teil des Durchmessers, welcher zwischen dem Endpunkte des Bogens und dem Sinus liegt, oder als die Senkrechte von jenem Endpunkte auf den Sinus. „Gardaga"[2]) (d. h. Kardaga) ist der Bogen von 15°, und der Durchmesser wird für die Tafel der Sinusse, wie bei Al-Zarkâli 300′ gesetzt (siehe S. 79), während er in der Tafel der Sehnen, wie bei Ptolemäus 120° beträgt. Dann kommen die figura „cada" (statt kaṭṭa) des Menelaus für die Ebene und die Sätze des Ptolemäus zur Sehnenberechnung. Hierauf überträgt er diese „figura cada" direkt auf die Kugel, ohne einen Beweis zu geben und zeigt an mehreren Beispielen ihre Verwendung, indem er sich ganz an den Almagest hält. Die Lösungen der den Schlufs der Abhandlung bildenden Aufgaben, aus der Höhe eines Gegenstandes und der Sonnenhöhe den Schatten und umgekehrt, aus der Höhe des Gegenstandes und der Schattenlänge die Sonnenhöhe zu finden, stimmen ganz mit denen überein, die wir bei Al-Battâni fanden (S. 51)[3]). Wir sehen somit, dafs die Trigonometrie der Araber wenigstens teilweise auch in Deutschland bereits im 13. Jahrhundert bekannt geworden war.

---

1) Herr M. Curtze hatte die grofse Güte, uns brieflich auf dieses Manuscript aufmerksam zu machen (Cod. lat. 234) und stellte uns aufserdem ein ausführliches Exzerpt desselben zur Verfügung, dem das Folgende entnommen ist. — 2) Herr Curtze schliefst aus dieser Schreibweise sowie aus jener von „cada", dafs der anonyme Autor der Schrift ein Sachse war (briefliche Mitteilung). — 3) Den Durchmesser des Schattendreieckes, d. h. die Hypotenuse nennt er „podismus umbrae."

§ 4. Die Trigonometrie im 14. und 15. Jahrhundert bis zum Auftreten Regiomontans.

Im 14. Jahrhundert begegnen wir zunächst wieder jüdischen Gelehrten, die sich in Spanien, Italien und Frankreich das Studium mathematischer und astronomischer Kenntnisse angelegen sein liefsen. Im Jahre 1310 verfafste Isak ben Joseph Israeli ein umfassendes Werk über Astronomie in hebräischer Sprache[1]), welches damals in hohem Ansehen stand. Im ersten Traktate desselben sollen die hauptsächlichsten Theoreme der Geometrie und der beiden Trigonometrien angeführt sein. In diesem Werke sucht Steinschneider den Kulminationspunkt der astronomischen Wissenschaft bei den Juden im Mittelalter. Weiter haben wir den Astronomen Immanuel ben Jakob zu nennen[2]), dessen Arbeiten in die Zeit von 1340 bis 1365 fallen und in hebräischen Kommentaren, in lateinischen Übersetzungen und griechischen Bearbeitungen bestehen. Er war in der Provence geboren und lebte in Avignon, dem damaligen Sitze des Papstes. Näheres ist über den Inhalt seiner Schriften nicht bekannt. Joseph ibn Wakkar aus Sevilla[3]) verfafste in Toledo 1357—1358 astronomische Tafeln in arabischer Sprache, welche er 38 Jahre später ins Hebräische umarbeitete. Einer Durchsicht dürften die diesen Tafeln vorhergehenden Canones wert sein, da sie bei ähnlichen Werken gewöhnlich die Theorie der Konstruktion derselben enthalten.

Wir haben diese Männer und ihre Schriften hauptsächlich deshalb angeführt, um Sprachverständige auf dieselben aufmerksam zu machen, indem wir glauben, dafs in jenen Werken noch interessante Aufschlüsse über den damaligen Stand der Trigonometrie zu finden wären. Jetzt wenden wir uns aber zu einem Gelehrten, der durch eigene Leistungen unser volles Interesse in Anspruch nimmt. Levi ben Gerson[4]) aus Bagnolos in Katalonien, häufig auch Leo Israelita

---

1) Steinschneider, Die Mathematik bei den Juden. Biblioth. math. 1897. 39 ff., sowie Magazin für die Litteratur des Auslandes 1846. 378. Das Werk hat den Titel „Liber 'Jesod Olam' sive Fundamentum Mundi." Neu herausgegeben von Berl Goldberg, Berlin 1846—1848. in 4°. — 2) Steinschneider a. a. O. 1898. 79. — 3) Ebenda 1898. 36. — 4) Auf diesen jüdischen, später, wie es scheint, zum Christentum übergetretenen Gelehrten hat zuerst S. Günther aufmerksam gemacht: „Die Erfindung des Baculus geometricus." Biblioth. math. 1885. 137 und ist später wiederholt auf ihn zurückgekommen, so in derselben Zeitschrift 1890. 73 und in der geographischen Zeitschrift von A. Hettner 1898. 157 ff. Auch Steinschneider (Biblioth. math. 1890. 107 und 1897. 103) und zuletzt M. Curtze ebenda 1898. 97 ff. haben sich eingehend mit ihm beschäftigt. An letzterer Stelle findet sich die genaueste Beschreibung des Instrumentes.

de Baneolis bezeichnet, lebte in Avignon und starb daselbst 1344. Von ihm existiert eine handschriftlich erhaltene Abhandlung[1]), welche den Titel führt[2]) „Leo de Balneolis Israhelita De Sinibus, chordis et arcubus, Item Instrumento Revelatore Secretorum", und unser Interesse in hohem Maſse in Anspruch nimmt. Zunächst bemerken wir, als für uns weniger wichtig, daſs unter dem „Revelator secretorum" jenes zu geodätischen und astronomischen Messungen später vielfach verwendete Instrument verstanden ist, welches gewöhnlich der Jakobstab heiſst. Dasselbe bestand aus einem geteilten Stabe, längs welchem eine senkrechte Tafel von bestimmter Höhe verschoben werden konnte (Fig. 29). Um die Winkeldistanz SS' zu messen, visierte man von A über B und B', und verschob die Quertafel BB' so lange, bis die Visierlinien S und S' dieselbe trafen; indem man die Teilungen auf AC und BC ablas, konnte man dann mittelst einer trigonometrischen Funktion den Winkel $2\alpha = \text{arc.}\, SS'$ bestimmen. Levi, bei welchem dieses Instrument bis jetzt zum erstenmale angetroffen wurde, bedient sich hierzu jedoch nicht der Tangenten, die er offenbar nicht kennt, sondern des Sinus, indem er $\sin\alpha = \frac{BC}{\sqrt{AC^2 + BC^2}}$ setzt. Zu diesem Zwecke berechnet er eine Sinustafel für den Radius 60^p[3]) auf Minuten und Sekunden und läſst die Winkel in Intervallen von $15'$ fortschreiten[4]). Auſser dieser Tafel enthält aber die Abhandlung noch verschiedenes für die Geschichte der Trigonometrie Interessante, von dem wir die Hauptsachen mitteilen wollen. In der „dictio prima" des 2. Kapitels definiert er den Sinus und den Sinus versus, für den er jedoch nur die Bezeichnung „Sagitta" gebraucht; in der „dictio secunda" werden folgende Sätze geometrisch bewiesen: 1) $(\text{crd}\,\alpha)^2 = \text{Sagitta} \cdot \text{Durchmesser}$, so daſs aus der Kenntnis der Sagitta[5]) auch die der Sehne folgt; ferner ist $\sin^2\alpha = (\text{crd}\,\alpha)^2 - (\text{sag}\,\alpha)^2$ oder $\sin^2\alpha = \text{sag}\,\alpha(d - \text{sag}\,\alpha)$, wo d den Durchmesser bezeichnet, und $\text{crd}\,2\alpha = 2\sin\alpha$. —

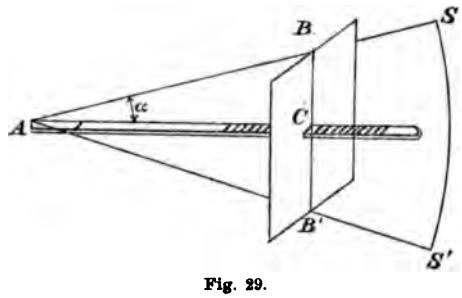


Fig. 29.

1) Cod. Vindob. Pal. 5277 (Philos. 68), welchen Curtze a. a. O. exzerpiert und kommentiert. Seiner Güte verdanken wir die Mitteilung seines Artikels noch vor dessen Erscheinen. — 2) Ebenda 98. — 3) Er nennt die Teile „gradus", gibt aber ausdrücklich an, daſs sie nicht mit den Winkelgraden identisch seien. — 4) M. Curtze bringt a. a. O. 103 einen Teil dieser Tafel zum Abdruck. — 5) Im Folgenden ist statt Sagitta zur Abkürzung sag geschrieben.

2) $\text{sag}\,\alpha + \cos\alpha = r$ (r Radius), für cosinus steht „sinus residui arcus 90 graduum." — 3) $\text{sag}\,(90^0 + \alpha) = 1 + \sin\alpha$. — 4) $\text{crd}^2(\alpha \pm \beta) = (\sin\alpha \pm \sin\beta)^2 + (\text{sag}\,\alpha - \text{sag}\,\beta)^2$ [1]). — 5) $\text{sag}\,\alpha = 1 - \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$, wobei die Wurzel als „distantia sinus a centro circuli" bezeichnet wird.

Diese Sätze dienen Leo zur Konstruktion der erwähnten Sinustafel, indem er von den bekannten Sinussen von 90^0, 30^0 und 18^0 ausgehend sich mittelst seiner Additionsformel und durch fortgesetzte Halbierung zunächst die Sinusse von $8^0\,15'$ und von $3^0\,45'$ verschafft, aus denen sich wieder durch weiteres Halbieren bezüglich $\sin(15' + \frac{1}{128}{}^0)$ und $\sin(14\frac{1}{16}') = \sin(15' - \frac{1}{64}{}^0)$ ergeben. Diese beiden Sinusse sind aber bis zu den Quinten genau den zugehörigen Bogen proportional, und durch Proportionsrechnung ergibt sich $\sin 15' = 0^0\,15'\,42''\,28'''\,12^{IV}\,27^{V}$, und damit ist die weitere Berechnung der Tabelle ermöglicht. Dieses Verfahren zeigt, wenigstens was die Ausgangswerte anlangt, etwas Ähnlichkeit mit dem des Abû'l Wafâ (S. 56—57), ist also, wenn nicht eigene Erfindung Leo's, sicher arabischen Ursprungs. Eine durchaus selbständige Leistung aber stellt die in der „dictio quinta" des 2. Kapitels entwickelte ebene Trigonometrie dar, indem sie einerseits die Sehnentrigonometrie Dschâbir's, die damals wohlbekannt war, wesentlich übertrifft, andererseits von einer in demselben Codex enthaltenen noch zu besprechenden Trigonometrie, welche auf letzterer beruht, völlig abweicht. Über die Behandlung des ebenen rechtwinkligen Dreieckes ist nur zu bemerken, dafs sie allein mit dem Pythagoräischen Satze und dem Sinus geschieht, während sich Ibn Aflah bekanntlich noch, wie die Griechen, durchaus der Sehnen bedient. Hierauf folgt die Berechnung schiefwinkliger Dreiecke, und zwar wird zuerst die Aufgabe, aus den drei Seiten des Dreieckes die Winkel zu berechnen, in der bekannten Weise durch Bestimmung der Höhe mit dem Euklid'schen Satze und darauffolgender Anwendung des Sinus auf die entstehenden Teildreiecke gelöst; hierbei werden die beiden Fälle, welche entstehen, je nachdem die Höhe innerhalb oder aufserhalb des Dreieckes fällt, in bemerkenswerter Kürze durch eine Vorschrift, die auf beide Figuren pafst, erledigt. Die zweite Aufgabe, aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der einen die übrigen Stücke zu finden, welche er zunächst mittelst der Sehnen behandelt, indem er den umschriebenen Kreis des Dreieckes konstruiert (vgl. die Lösung Geber's S. 82. Anm. 4), bietet ihm Gelegenheit den Sinussatz der ebenen Trigonometrie zu formulieren. Aus dem ihm bekannten Zu-

1) Der Beweis dieser Formel ist bei Curtze a. a. O. 102 mitgeteilt. Auch das Folgende ist dieser interessanten Abhandlung Curtze's entnommen.

sammenhange der Sehne mit dem Sinus (siehe Gleichung 1) folgert er nämlich unmittelbar, „quod omnium triangulorum rectilineorum talem proportionem una linea habet ad aliam, qualem proportionem unus sinus angulorum, quibus dictae lineae sunt subtensae, habet ad alium", und aufserdem folgt, „dafs wenn in einem Dreiecke die Winkel und noch eine Seite bekannt sind, sofort auch die beiden anderen Seiten bestimmt werden können". Wir haben den Wortlaut des Satzes mitgeteilt und seine einfache Ableitung angedeutet, weil dies die älteste bis jetzt bekannte Stelle ist, an welcher sich der Sinussatz in der abendländischen Litteratur präzis ausgesprochen und bewiesen findet, und da Regiomontan, dem man ihn bisher zuschrieb, nachweisbar Levi's Abhandlung kannte[1]), so hat er ihn jedenfalls nicht selbständig aufgestellt, wenn auch sein Beweis, wie wir sehen werden, ein anderer war. Die letzte Aufgabe, welche Leo behandelt, aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die übrigen Stücke zu bestimmen, wird durch Fällen der Senkrechten vom Endpunkte einer dieser Seiten auf die andere gelöst und auch hier eine einzige Vorschrift für die beiden möglichen Fälle gegeben.

Während Levi ben Gerson eine bemerkenswerte Selbständigkeit in der Behandlung der ebenen Trigonometrie zeigt, ist dies in jener anonymen Handschrift[2]) aus derselben Zeit, die sich, wie oben bemerkt, in demselben Codex findet, weniger der Fall. Dieselbe enthält ebenfalls eine vollständige ebene Trigonometrie, die sich aber in der Hauptsache ganz an Geber's Sehnenmethode anschliefst, wie der Anonymus mit einer für die Gepflogenheiten jener Zeit bemerkenswerten Aufrichtigkeit eingesteht. Indem derselbe die rechtwinkeligen und schiefwinkeligen Dreiecke zusammennimmt, unterscheidet er bei den 4 Aufgaben: Gegeben 2 Seiten und 1 Winkel, 2 Winkel und 1 Seite, 3 Seiten, 3 Winkel, im Ganzen 25 Fälle, die er alle einzeln behandelt und mit eigenen Figuren versieht. So entstehen z. B. aus der ersten Aufgabe folgende zehn: I. Gegeben der eingeschlossene Winkel, und zwar fällt 1) die Höhe vom Endpunkt der einen den gegebenen spitzen Winkel einschliefsenden Seiten auf die andere innerhalb, 2) aufserhalb des Dreieckes, 3) sie fällt mit der Gegen-

1) Darauf hat S. Günther zuerst aufmerksam gemacht. Geographische Zeitschrift Jahrg. IV. 1898. 161. — Das Verzeichnis der im Besitze Regiomontan's befindlichen Bücher steht bei Petz, Mitteilungen zur Geschichte Nürnbergs 7. Heft. 1888. 260. — 2) Cod. Vindobon. Palat. 5277[12] und auch im Codex Basileensis F. II. 33. Durch die Güte des Herrn Curtze wurden wir auf dieselbe aufmerksam gemacht und uns eine Abschrift des Manuscriptes mitgeteilt. Diesem ist das Folgende entnommen.

seite zusammen, 4) der gegebene Winkel ist ein rechter, 5) derselbe ist ein stumpfer. II. Der gegebene Winkel liegt einer der beiden gegebenen Seiten gegenüber und zwar ist er zunächst spitz und die Höhe fällt 1) innerhalb, 2) aufserhalb des Dreieckes, 3) sie fällt mit der einen gegebenen Seite zusammen, 4) der Winkel ist ein rechter, 5) ein stumpfer. Alle diese Fälle sowie die übrigen 15 werden, wie bei Geber, gelöst, indem um die beiden entstehenden rechtwinkeligen Dreiecke die Kreise beschrieben werden, sodafs dann unmittelbar die Sehnenmethode zur Anwendung kommen kann. Der Autor verweist auch beständig auf eine „tabula cordarum et arcuum".

Ob der anonyme Verfasser jenes Traktates die Sinusfunktion nicht kannte oder vielleicht, nur im Besitze einer Chordentafel, deshalb Geber's Methode vorzog, läfst sich nicht entscheiden, dagegen sind uns aus jener Zeit noch einige andere Gelehrte bekannt, die wie Levi ben Gerson sehr wohl mit dem Sinus umzugehen wufsten. Wir nennen zunächst Johann de Lineriis[1]), einen Franzosen aus der Picardie, der um 1322 lebte und in Paris mit grofsem Erfolg Astronomie lehrte. Von ihm existiert noch handschriftlich eine Sinustafel[2]) und M. Curtze fand kürzlich einen handschriftlichen Traktat von ihm über Trigonometrie (aus 1322), sowie eine Abhandlung über praktische Geometrie[3]). Leider ist über diese Arbeiten bisher noch nichts Genaueres bekannt.

Dem Ende des 14. Jahrhunderts gehört ein gewisser Dominicus Parisiensis oder Dominicus de Clavasio[4]), d. h. aus Chiavasso in Piemont gebürtig, an; er war Hofastrolog des Königs von Frank-

---

1) Derselbe scheint ein zu seiner Zeit sehr renommierter Astronom gewesen zu sein. In Paris, woselbst damals eine vorübergehende Blüte des mathematischen Unterrichtes stattfand, hatte er zu Kollegen Joh. de Saxonia, Joh. de Muris und Bernardus. Er schrieb „Canones Primi mobilis et super tabulas aequationum planetarum" (d. h. eine sphärische Trigonometrie), die Günther in einem Maihinger Kodex sah (S. Günther, Gesch. des math. Unterr. im Mittelalter 169. Anm. 3), sowie „De sphaera." Er soll 1350 gestorben sein. Diese Notizen sind aus Trithemius „Liber de ecclesiasticis scriptoribus" (Hamburgi 1718) 140 von Günther mitgeteilt. Vgl. über ihn auch H. Suter, Die Mathematik an den Universitäten des Mittelalters 1887 in 4°. 42 und 46. Note 6 und Curtze, Biblioth. math. 1895. 105. — 2) Schon Libri, Hist. des Sciences math. en Italie II. 210. Anm. 2 erwähnt eine solche, Cantor II. 115 gibt an, dafs eine Tabula Sinus Mag. Joh. de Ligneriis in Oxford handschriftlich vorhanden ist, und M. Curtze fand diese Tafel in einer Reihe von Handschriften; a. a. O. 105 u. 106. Anm. 1. — 3) M. Curtze, Eine Studienreise, unternommen August bis Oktober 1896. Altpreufsische Monatsschrift XXXV. Heft 5 und 6. p. 450. — 4) Über ihn hat M. Curtze Forschungen angestellt in seinen „Mathematisch-historischen Miscellen". Biblioth. math. 1895. 107—110. Ihnen ist das Obige entnommen.

reich und lebte als solcher (jedenfalls vor 1368) in Paris. Von ihm stammt eine „Practica geometriae", in welcher er seine Vertrautheit nicht nur mit dem Sinus und dem Sinus versus und dessen Komplement, dem Cosinus, sondern auch mit „umbra versa" und „umbra recta" zeigt. Nach einer Bemerkung in seiner praktischen Geometrie beabsichtigte er, eine Schrift „Tractatus de umbris et radiis", welche sich mit Trigonometrie beschäftigen sollte, zu verfassen, indem er sagt, dafs durch die Tangenten vieles leicht zu erhalten sei, was sonst nur schwer zu erreichen ist. Es ist jedoch unbekannt, ob er diese Absicht ausführte.

Indem wir noch vorübergehend auf einen italienischen Gelehrten aus dem Ende des 14. und dem Anfang des 15. Jahrhunderts aufmerksam machen, Prosdocimo di Beldomandi (1370 oder 1380 bis 1428)[1]), der als hervorragender Astronom galt und Schriften hinterliefs, in denen sich zweifelsohne trigonometrische Dinge befinden, wenden wir unsere Blicke nach England.

Erwähnen wir vorübergehend, dafs der noch dem 13. Jahrhundert angehörige Erzbischof von Canterbury Johann Peckham (1228 bis 1292) eine Abhandlung über Trigonometrie hinterliefs[2]), über deren Inhalt aber leider noch nichts bekannt ist, so gelangen wir im 14. Jahrhundert zu mehreren englischen Gelehrten, welche ihre Bildung an der Oxforder Universität gewonnen hatten und dort lehrten. Diese mit Paris und Bologna zu den ältesten Hochschulen zählende Pflanzstätte der Wissenschaft ist, wie die beiden anderen, nicht durch einen eigentlichen Stiftungsakt, sondern allmählich entstanden, indem sich im 12. Jahrhundert die einzelnen Fakultäten zu geschlossenen Lehrkörpern vereinigten und sich am Beginne des 13. Jahrhunderts zu sogenannten „Studia generalia" formierten. Daselbst lehrte am Anfange des 14. Jahrhunderts Richard von Wallingford (1326 †), der als hervorragender Astronom und Mathematiker galt und einen Traktat „De sinibus demonstrativis, de rectangulo, de chorda et arcu" und anderes schrieb, was noch handschriftlich erhalten ist[3]). Desgleichen haben wir von Johannes Maudith, ebenfalls einem Mitgliede des Collegium Mertonense, der

1) A. Favaro, Bulletino di Bibl. e di storia XII. 16. Er schrieb einen „Tractatus de Astronomia", ebenda 164, ferner „Canones de motibus corporum supercelestium", 206 und eine „Compositio Astrolabii". Diese Schriften wären zu untersuchen. — 2) M. Curtze teilt in dem oben zitierten Reisebericht (450) mit, dafs er in St. Peter Seitenstetten eine solche Abhandlung fand. — 3) Suter, Die Mathem. auf den Univ. des Mittelalters 1887. 4°. 84. (De sinibus idem de chorda recta et versa. MSS. der Bodleianischen Bibliothek Cod. 1779. Classis V. No. 178.)

um 1346 blühte, eine Abhandlung „De chorda recta et umbra“ und „Tabulae astronomicae“[1]). Weiter hinterliefs Simon Bredon oder Biridanus „Tabulae chordarum“ (Sinus- und Sinusversus-Tafeln) und „Calculationes chordarum“ sowie „In demonstrationes Almagesti“. Auch sind uns noch die Namen verschiedener Astronomen überliefert, so eines Johann Killingworth (um 1360), eines Wilhelm Read und eines Walter Bryte, die alle dem Collegium Mertonense angehörten. Die Schriften, die einer eingehenden Durchsicht würdig wären, beweisen, dafs die Kenntnis der arabischen Trigonometrie sich damals schon bis England verbreitet hatte.

Eine der ältesten Universitäten war, wie schon erwähnt, Paris, und auch in mathematischer Beziehung hatte sie bis ins 14. Jahrhundert hinein ein gewisses Übergewicht bewahrt. Aber die Kirchenspaltung, die in der Verlegung des päpstlichen Sitzes nach Avignon (1305) und der Aufstellung der Gegenpäpste gipfelte, brachte auch in das Gelehrtenkollegium dieser Hochschule Zwist[2]). Die deutschen Lehrer und Schüler der Hochschule, die sich auf Seite des römischen Papstes stellten, kehrten, teils freiwillig, teils gezwungen Paris den Rücken und wanderten nach Deutschland aus, wozu auch die Entstehung neuer Universitäten daselbst beigetragen haben mag. Die vorzugsweise mathematische Hochschule in Deutschland wurde die im Jahre 1365 gegründete Universität Wien, die diesen Platz auch geraume Zeit behielt. An ihr wirkten zunächst zwei aus Paris geschiedene Gelehrte Albert von Sachsen[3]) und Heinrich von Hessen[4]), von denen der erstere 1365 durch Herzog Rudolf IV. von Österreich nach Wien berufen wurde, wo er jedoch nur ein Jahr blieb (1390 starb er als Bischof von Halberstadt), während der zweite von 1383 an daselbst lehrte und sich grofse Verdienste um diese Hochschule erwarb. Wir erwähnen diese Männer nur, weil ihnen das Verdienst zukommt, mathematisches Wissen, wie es in Paris gepflegt worden war, zuerst auf deutschen Boden verpflanzt zu haben. Was die uns speziell interessierende Wissenschaft angeht, so können wir höchstens von Albert von Sachsen anführen, dafs er in einer Abhandlung über die Quadratur des Kreises[5]), die sich einer ähnlichen von Campanus[6]) anschliefst, $\pi = 3\frac{1}{7}$ annahm und

1) Ebenda p. 83—84. — Auch in der Perspektive des Thomas de Bradwardina oder Bradwardinus sind die „Schatten“ wiederholt erwähnt. Cantor II. 101. — 2) Siehe hierüber Cantor II. 126—127. — 3) Cantor II. 130 ff. — 4) Ebenda 136 ff. — 5) H. Suter hat diese Abhandlung aus einer Berner Handschrift veröffentlicht. Zeitschr. für Math. und Phys. XXIX. Hist.-litter. Abteil. 87—94. — 6) De tetragonismo, seu Quadratura circuli. Venetiis 1503 in 4°.

dieses Verhältnis für ein exaktes ansah, wie das mit wenigen Ausnahmen im ganzen Mittelalter der Brauch war[1]). Zu denen, die hiervon eine rühmliche Ausnahme machten, gehörte der oben erwähnte Dominicus Parisiensis, der ausdrücklich betont, $3\frac{1}{7}$ sei nur ein Näherungswert[2]), und ihm hat auch eine praktische Geometrie, die Geometria Culmensis[3]), welche am Ende des Jahrhunderts lateinisch verfaſst, aber frühzeitig deutsch bearbeitet worden war, nachgeschrieben.

Wichtiger als die beiden genannten Männer ist für uns ein anderer der Wiener Hochschule im Anfange des 15. Jahrhunderts angehöriger Gelehrter: Johannes Schindel de Gamundia[4]), gewöhnlich Johann von Gemunden genannt. Um 1380 wahrscheinlich in Schwäbisch Gemünd geboren, wurde er 1406 in Wien Magister der freien Künste und las dort in der sogenannten Artistenfakultät, aus der sich später unsere philosophische Fakultät entwickelte, über die verschiedensten mathematischen, astronomischen und anderen Wissensgebiete. Er starb 1442. Von ihm haben wir einen noch handschriftlich erhaltenen Traktat[5]) mit dem Titel „Johannis de Gemunden de sinibus, chordis et arcubus.“ Darin unterscheidet er, wie es damals üblich war, den „sinus rectus“ und den „sinus versus“, für den er auch die Bezeichnung „sagitta“ anführt. Den Sinus von 90^0 oder die halbe Sehne von 180^0 nennt er „sinus totus“ oder „sinus perfectus“ und kennt auch die Bezeichnung „cardaga“ für den Bogen von 15^0. Aufserdem kennt er für π die Archimedischen Grenzen, ferner den Wert des Ptolemäus, den Wert $\sqrt{10}$, den er als indisch bezeichnet, und endlich das Verhältnis $\frac{62832}{20000}$, das wir bei Âryabhâṭa fanden (S. 36). Aufserdem[6]) findet sich hier die später unter Peurbach's Namen gedruckte Sinusrechnung, auf die wir weiter unten zu sprechen kommen, in weit ausgedehnterer Gestalt durchgeführt und mit einer Anleitung zu ihrem Gebrauche versehen. Johann von Gemunden benutzt, wie wir in unseren Tafeln, Proportionalteile und hat die Differenzen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Tafelgröfsen aufgestellt. Auch stammt von ihm, was schon Cantor bemerkt hat, die gleichzeitige

1) Cantor II. 133. — 2) M. Curtze, Biblioth. math. 1895. 108. — 3) Cantor II. 141. — 4) Nach den neuesten Untersuchungen von M. Curtze (Biblioth. math. 1896. 4 und Abhandl. zur Gesch. der Math. 8. Heft. 1898. 33. Anmerk. 4) ist Schindel der Familienname des Gelehrten und Schwäbisch Gemünd sein Geburtsort. — 5) Herr Curtze hatte die Güte uns einen Auszug der von ihm im Cod. Vindobon. Palat. 5277 aufgefundenen Abhandlung zuzustellen, dem wir das Obige entnahmen. — 6) Briefliche Mitteilung des Herrn Curtze vom 19. November 1898.

Vermengung des Sexagesimal- und Dezimalsystems, indem der Tafelradius zu 600000 angenommen wird. Diese Vereinigung beider Systeme soll übrigens nach einer Bemerkung Curtze's bis auf Joh. de Lineriis zurückgehen.

Wohlbewandert in der ebenen Trigonometrie, sowohl was die Sehnenrechnung, als auch was den Gebrauch von „sinus rectus" und „sinus versus" anlangt, zeigt sich auch der anonyme Autor eines Traktates mit dem Titel „De inquisicione capacitatis figurarum", den M. Curtze in einer Münchener Handschrift auffand[1]). Der Verfasser, der auch auf Johannes de Lineriis verweist[2]), scheint nach einer Bemerkung[3]) in seinem Traktate, auch eine Abhandlung über Trigonometrie geschrieben zu haben, die aber bisher noch nicht aufgefunden wurde. Er bedient sich zu seinen Rechnungen sowohl der Chordentafel des Almagest, als auch einer Sinustafel[4]), wohl jener, die Johann de Lineriis berechnet hatte. Die Abhandlung scheint nach Curtze der ersten Hälfte des 15. Jahrhunderts anzugehören und ist von einem gewissen Magister Reinhard von Wurm geschrieben, der möglicher Weise auch ihr Verfasser ist.

Nicht Mathematiker von Profession, wohl aber bemerkenswert durch seine Leistungen, die auch in das Gebiet der Trigonometrie einschlagen, war der Kardinal Nicolaus von Cusa oder Cusanus[5]) (1401—1464). Er war ein Deutscher, der Sohn eines Fischers Johannes Chryppfs (Krebs) und in Cues am linken Moselufer geboren, studierte in Heidelberg und Padua, woselbst er wahrscheinlich zu den Hörern des Prosdocimo di Beldomandi gehörte, und beschäftigte sich nur in den spärlichen Mufsestunden, die ihm die intensive Beteiligung an den damaligen Kirchenstreitigkeiten übrig liefs, mit mathematischen und astronomischen Studien. Besonderes Interesse schenkte er der Kreisquadratur, die er auf einem ganz von dem Archimedeischen Wege verschiedenen zu lösen versuchte, indem er, wie sich Cantor ausdrückt[6]), eine Arcufication der Geraden vornahm. Von dem gegebenen Umfange des regulären

1) Cod. lat. m. 56. M. Curtze hat jenen Traktat in „Abhandl. zur Gesch. der Math. Heft 8. 1898. 31—68 veröffentlicht und kommentiert. — 2) Ebenda 46. — 3) Ebenda 42. — 4) So behandelt er z. B. die Aufgabe aus dem Durchmesser ac (Fig. e) und dem Bogen ab die Strecke ec zu finden, indem er $ec = \sin^2 ab : \text{sinvers}\, ab$ bildet. Ebenda 55. 67. — 5) Cantor II. 170 ff., wo Cusanus eingehend behandelt und die einschlägige Litteratur über ihn angegeben ist. — 6) A. a. O. 176. Eine Gesamtausgabe der Werke des Kardinals erschien zu Paris 1514 in 2°., eine weitere 1565 zu Basel in 2°. mit dem Kommentar eines gewissen Omnisanctus. Diese zitieren wir im Folgenden als „Opera".

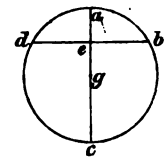


Fig. e.

Dreieckes ausgehend ging er zu den damit isoperimetrischen Vielecken von immer gröfserer Seitenzahl über, bis er schliefslich zum Kreise gelangte, dessen Halbmesser gesucht wurde. War dieser zu finden, so hatte man in der That die Kreislinie rektifiziert. Um diesen richtigen und völlig neuen Gedanken auszuführen, der im Wesentlichen auf die Betrachtung des Kreises als eines Polygons von unendlich vielen Seiten hinauskommt[1]), hat Cusanus verschiedene mehr oder weniger gelungene Versuche gemacht, bei denen er auch auf den Zusammenhang dieser Betrachtungen mit der Berechnung der zu einem Bogen gehörigen Sehne hinweist[2]), in welcher Richtung nach seiner Ansicht die Geometrie noch lückenhaft war. So wenig ihn aber seine ersten Untersuchungen in den mathematicis complementis[3]), bei welchen er das Verhältnis $p_n - p_3 : s_3 - s_n =$ const. für jedes n annimmt, indem er unter p_n — Primlinie — den Radius des dem Polygone von n Seiten eingeschriebenen, unter s_n — Sekundlinie — den Radius des umgeschriebenen Kreises versteht, zu einem genaueren Werte von π führten, als der Archimedeische war, ebensowenig gelang ihm eine genauere Berechnung der Sehnen, als sie Ptolemäus leistete. In der Abhandlung „De mathematica perfectione" dagegen gab er eine Methode an[4]), die thatsächlich, wenn er sie zur Sehnenrechnung benützt hätte, einen wesentlichen Fortschritt bedeutet haben würde. Er hat jedoch nur ihre Verwendbarkeit hierzu mit kurzen Worten angedeutet, und es dauerte fast 200 Jahre, bis der niederländische Mathematiker Snellius, sei es durch Cusanus angeregt, sei es selbständig, die Methode wieder aufgriff und fruchtbar verwertete.

Der Gedankengang der Methode ist in uns geläufiger Darstellung folgender[5]): Ist in Fig. 30 $bc = \frac{a_n}{2}$ die halbe Seite eines regelmäfsigen

1) Cusanus spricht sich an mehreren Stellen hierüber aus, und da man erst jüngst Michael Stifel das Verdienst zugesprochen hat, zum erstenmale den Kreis als ein Unendlich-Vieleck betrachtet zu haben (Pringsheim, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Leipzig 1898. I. 63), so wollen wir die prägnanteste Stelle hier anführen, auf die übrigens auch schon Cantor II. 177 hingewiesen hat. Er sagt, Opera 1110: „Quanto autem polygonia aequalium laterum plurium fuerit angulorum, tanto similior circulo; circulus enim si ad polygonias attendas est infinitorum angulorum. Et si ad ipsum circulum tantum respicis, nullum angulum in eo reperies, et est interminatus, inangularis: et ita circulus inangularis et interminatus in se complicat omnes angulares terminationes, polygonias datas et dabiles." — 2) Opera 1025, wo er auch vom Sinus spricht. — Statt sinus versus sagt er beständig sagitta. — 3) Opera 1025 ff. in Verbindung mit 991—994. — 4) Opera 1120—1154 und speziell 1135, wo es heifst: „Scientia chordarum nunc extat perfecte adinventa". — 5) Cantor II. 183—184.

Sehnenpolygons, dessen Primlinie $p_n = ab$ und dessen Sekundlinie $ac = s_n$ ist, und heifse $\sphericalangle bac = \varphi$, so ist, je mehr sich das Polygon dem Kreise nähert, um so genauer $bc = \text{arc. } \varphi = \varphi \cdot s_n$. Für $n = \infty$ aber wird $p_n = s_n$, und es ist, wenn x irgend eine Gröfse bedeutet, $p_n + x = s_n + x$, also $s_n \varphi : \frac{a_n}{2} = (s_n + x) : (p_n + x)$. Indem nun Cusanus die Gröfse x für das Quadrat und das Sechseck berechnet, findet er, allerdings unter unrichtigen Voraussetzungen, für x näherungsweise den Wert $2s_n$, so dafs die Proportion $s_n \varphi : \frac{a_n}{2} = (s_n + 2s_n) : (p_n + 2s_n)$ folgt; aus dieser ergibt sich:

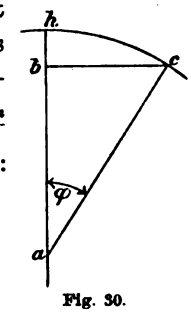


Fig. 30.

$$\varphi = \frac{\frac{3\,a_n}{2\,s_n}}{2 + \frac{p_n}{s_n}} = \frac{3 \sin \varphi}{2 + \cos \varphi},$$

und man kann somit hieraus sowohl φ zu einer vorgegebenen Sehne, als auch umgekehrt berechnen und ebenso den Wert von π bestimmen. Wir werden hierauf bei Snellius noch genauer eingehen.

Es besteht kein Zweifel, dafs Cusanus mehr als irgend einer seiner Zeitgenossen selbständige mathematische Gedanken hatte, die auch gewifs gröfsere Verbreitung gefunden hätten, wenn sie nicht in unglaublich schwerfälliger und dunkeler Sprache niedergelegt worden wären.

Cusanus' Gedanke einer Arcufication der Geraden kommt auch in einer 1503 erschienenen Schrift des Kanonikers Charles Bouvelles (1470—1533) wieder[1]), führte diesen aber zu einem weit schlechteren Resultate, als es jener erhalten hatte. Aufserdem hat Bouvelles noch eine Konstruktion der von einem Punkte des auf einer Geraden rollenden Kreises beschriebenen Kurve gegeben, die er übrigens als einen Kreisbogen annahm. Seine Konstruktion führt direkt auf den indischen Wert $\pi = \sqrt{10}$[2]), der damals mehrfach bekannt war.

Mehr als die neuen Gedanken des Cusanus fanden in jener Zeit die alten Methoden der Sehnenrechnung Anklang. Denn in der Practica geometriae, welche Luca Paciuolo (1445—1514 ?), ein Franziskanermönch, als welcher er den Namen Fra Luca di Borgo Sancti Sepulchri führte, in seiner „Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita", 1494 in Venedig in fol. veröffent-

1) Cantor II. 349. — 2) Ebenda 352. Der Wert $\sqrt{10}$ findet sich auch in einer anonymen Handschrift von 1456, die der Cod. lat. monac. 14908 umfafst. Curtze, Biblioth. math. 1894. 107.

lichte[1]), wird die Sehnentafel Leonardo Pisano's und dessen Interpolationsverfahren in wörtlicher Übersetzung mitgeteilt. Überhaupt ist diese Geometrie fast durchweg eine wortgetreue Übersetzung der ähnlich lautenden Schrift des Pisaners. Da aber Luca's Summa eine Zusammenfassung des gesamten damals allgemein bekannten mathematischen Wissens darstellt, so dürfte der Schluſs gerechtfertigt sein, daſs die Anwendungen der Trigonometrie auf die Feldmeſskunst seit mehr als dritthalbhundert Jahren keine Fortschritte gemacht hatte.

Anders scheint es in der Schiffahrtskunde gewesen zu sein, denn Libri gibt in seiner Geschichte der Mathematik in Italien an[2]), daſs von der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts ab die Trigonometrie für die Nautik in Anwendung gekommen sei. In der That kennt man[3]) aus jener Zeit eine Schiffahrtsregel, welche den Namen „Marteloio" oder besser „Martologio" führt und auf der Benützung von vier trigonometrischen Funktionen beruht. Die kleine handschriftliche Abhandlung, in welcher diese nautische Regel niedergelegt ist, beginnt mit der Angabe der trigonometrischen Funktionen für alle Winkel des ersten Quadranten, welche von 90^0 um ein Vielfaches von $11\frac{1}{4}^0 = \frac{90}{8}^0$ abstehen. Für jeden Winkel von der Gröſse von $11^0\,15'$, $22^0\,30'$, $33^0\,45'$, 45^0, $56^0\,15'$, $67^0\,30'$, $78^0\,45'$, 90^0 finden sich in der Tafel Sinus, Cosinus, Sekante und Tangente und zwar unter Zugrundlegung des Sinus totus 100 verzeichnet. Die hier zugrunde gelegte Achtteilung des Winkels von 90^0 hat ihren Grund in der Achtteilung der Windrose. Auſser dieser kleinen Funktionentabelle soll sich der Venezianische Autor jener Abhandlung auch des Sinussatzes[4]) der ebenen Trigonometrie bedienen und auſserdem verwendet er, um aus drei Punkten seines Kurses die kürzeste Entfernung vom Ausgangs- und Endpunkt seiner Reise zu bestimmen, eine an unsere Polygonometrie sehr stark erinnernde Methode. Sind nämlich A, B, C in Fig. 31 die drei Punkte des Kurses, ist A die Anfangs-, D die Endstation, $\sphericalangle BAD = 11\frac{1}{4}^0$, $\sphericalangle CBG = 22\frac{1}{2}^0$, $\sphericalangle FCD = 45^0$, und projiziert man B und C senkrecht auf AD, so

1) Vgl. über ihn sowie über seine Summa Cantor II. 280 ff. — 2) Histoire des Scs. Mathém. en Italie II. 223. — 3) Vgl. S. Günther, Studien zur Gesch. der mathem. und phys. Geogr. 1877. 337—340, der hier auf die Mitteilungen hinweist, die Toaldo in seinen Saggi di Studi Veneti, la Venezia 1782. 41 über die in einer Venezianischen Handschrift gefundene Regel macht. Toaldo schlieſst aus der Benützung der Dezimalteilung und der Tangenten, daſs die Schrift erst nach Regiomontan verfaſst ist, doch weist Günther mit Recht auf die Nichtstichhaltigkeit dieser Argumente hin. — 4) Günther ebenda 339.

ist die gesuchte Distanz $AD = AE + BG + DF = AB \cos 11\frac{1}{4}^0 + BC \cos 22\frac{1}{2}^0 + CD \cos 45^0$. Da $AB = BC = 100$ Miglien angenommen wird, so ergibt die Tabelle für $AE = 100 \cdot 0{,}98$, für $BG = 100 \cdot 0{,}92$, für $BE = 100 \cdot 0{,}20$ und für $CG = 100 \cdot 0{,}38$, woraus $FD = 100 \cdot 0{,}58$ und schliefslich $AD = 248$ Miglien folgt, wie es auch angegeben wird.

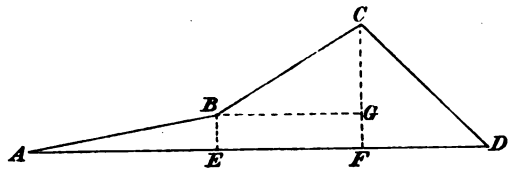


Fig. 31.

Die erwähnte Tabelle der trigonometrischen Funktionen ist jedoch nicht die einzige ihrer Art, die wir aus jener Zeit kennen, denn der Venetianer Vincenzo Formaleoni[1]) verweist auf eine fast genau ebenso eingerichtete Seemannstafel, welche auf einer in der St. Markus-Bibliothek zu Venedig vorhandenen, 1496 von Andräas Bianco gezeichneten Seekarte sich findet. Auch ihr liegt die zentesimale Teilung zugrunde. Da wir übrigens gerade von zentesimaler Teilung sprechen, so wollen wir noch anführen, dafs in jener Zeit auch schon der später noch wiederholt, aber immer nur mit kurzer Lebensfrist auftretende Gedanke einer zentesimalen Winkeleinteilung erscheint. Günther hat die Einteilung des Winkelgrades in 100′, der Minute in 100″ in einem zwischen 1445 und 1450 geschriebenen Kodex von Theodoricus Ruffi, Lektor des Minoritenklosters in Gronenberch nachgewiesen[2]). Nachahmung scheint dieses Verfahren allerdings zunächst nicht gefunden zu haben, wenigstens ist uns bis zum 17. Jahrhundert kein weiteres Beispiel bekannt geworden.

Kehren wir nach dieser kurzen Abschweifung auf das Gebiet der Schiffahrtskunde wieder zu den mathematischen Studien an der Wiener Hochschule zurück, so treffen wir auf einen Mann, dessen wissenschaftliche Thätigkeit für uns den Übergang zur neuen Zeit bildet, Georg Peurbach. Im Jahre 1423 zu Peurbach unweit Linz geboren, studierte er in Wien, begab sich dann auf Reisen, namentlich nach Italien, wo er mit Nicolaus Cusanus und Bianchini bekannt wurde; später treffen wir ihn als Astronomen des Königs Ladislaus von Ungarn und dann als Nachfolger Johanns von Gemunden an der Wiener Universität. Er starb schon 1461 und hinterliefs

1) Saggio sulla nautica antica dei Veneziani. La Venezia 1783. Dieses Zitat bringt Pfleiderer. Ebene Trigonometrie 1802. p. 165. Es stehen in dieser Tafel die Sinus und Cosinus für den Radius 100, die Cosekanten und Cotangenten für den Radius 10. Näheres über mehrere von Bianco 1436 gezeichnete Karten bei A. Breusing, Zeitschr. für wissenschftl. Geographie 1881. 129 und 180. — 2) Cod. lat. m. 11067. Vgl. hierüber Günther a. a. O. 249.

eine Reihe von Schriften, die in mancher Beziehung bahnbrechend wirkten.

Für uns von besonderem Interesse ist der „Tractatus Georgii Peurbachii super Propositiones Ptolemaei de sinibus et chordis". Wir erwähnten schon, dafs derselbe eigentlich von seinem Vorgänger im Amte herstammt, wollen ihn aber doch hier besprechen, da er einmal unter Peurbach's Namen bekannt wurde. Er erschien 1541 in fol. zu Nürnberg mit einer Sinustabelle Regiomontan's, dem berühmten Schüler Peurbach's, im Druck herausgegeben. Vier Blätter dieser Schrift sind als von Peurbach herrührend bezeichnet, und auf ihnen finden sich zweierlei Methoden zur Berechnung von Sinustabellen angeführt. Die eine ist die von uns schon erörterte indische, die Peurbach dem Al-Zarkâli entnahm, (er kennt auch die Werte $\sqrt{10}$ und $\frac{62832}{20000}$ für π und hebt ihren Grad der Annäherung hervor), die andere ist die des Ptolemäus; neu daran ist nur die Wahl des Radius, den Peurbach oder sein Vorgänger, um eine gröfsere Genauigkeit zu erzielen, gleich 600 000 setzte. Die von ihm berechnete Tabelle ist jedoch nicht abgedruckt, da zur Zeit der Drucklegung der Schrift bereits die genauere Tafel des Regiomontan existierte. Aufser diesen Grundzügen zur Berechnung einer Sinustafel verdanken wir Peurbach auch die Verbesserung des uns schon bekannten geometrischen Quadrates, wozu er seine Sinustafel praktisch verwendete. Die dem Erzbischof Johannes von Gran in Ungarn zugeeignete Beschreibung des Instrumentes erschien 1516 in Nürnberg[1]); dasselbe war ein aus Holz oder Metall hergestelltes Quadrat von 2 Ellen Seitenlänge. Zwei Seiten, die als „latus rectum" (Fig. 32: BC) und „latus versum" (CD) bezeichnet wurden, waren in 1200 Teile geteilt, so dafs jedes Teilchen etwa $\frac{1}{2}$ mm betrug. Um die Ecke A war ein mit zwei Dioptern versehenes Lineal drehbar, und die senkrechte Aufstellung geschah durch ein Bleilot. Wurde von E aus irgend ein Punkt anvisiert, so konnte man auf einer der Seiten BC oder CD die Anzahl der Teilstriche ablesen, bei denen das drehbare Lineal einschnitt. Peurbach hatte eine Tabelle beigegeben, welche zu der auf der latus rectum abgelesenen Zahl den Winkel EAB, zu der auf der latus versum stehenden den Winkel EAD gab. Diese Tafel hatte er folgendermafsen abgeleitet. Ist a irgend eine Zahl zwischen 0 und 1200, auf die das Lineal hinweist, so ist der Sinus des entsprechenden Winkels α gleich $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1200^2}} \cdot 600\,000$, hieraus fand er mit seiner Tafel α, welches neben a in die Tabelle

1) Quadratum geometricum praeclarissimi Mathematici Georgii Burbachii. Norimbergae. fol. 1516/17. 10 Blätter.

eingetragen wurde. Dieselbe ist also eigentlich eine Arcustangens-Tafel, da $\alpha = \text{arctg} \cdot \frac{a}{1200}$ ist. Da aber seine Sinustafel nur von 10′ zu 10′ berechnet war, so mufste er, um diese Winkel zu finden, über ein Interpolationsverfahren verfügen, in das er uns leider keinen Einblick gewährt. Die Tafel war in der Weise eingerichtet, dafs sie vier Folioseiten umfassend auf jeder Seite sechs abwechselnd rot und schwarz gedruckte Spalten enthielt, von denen jede durch zwei Seiten hindurchlief und zu je 100 Zahlen a die zugehörigen Winkel in Graden, Minuten und Sekunden gab. Eine zweite Tabelle, welche die Verwendung des Instrumentes als Distanzmesser erleichterte, hat von trigonometrischem Standpunkt aus kein Interesse. 13 Probleme, die gelöst werden, zeigen die Brauchbarkeit des Instrumentes, das von Peurbach auch zum erstenmale zur Bestimmung von Sonnenhöhen und dgl. benützt wurde[1]). Die Umgehung der Tangente bei Berechnung der Tabelle beweist wohl, dafs Peurbach noch keine Tangententafel zur Verfügung hatte, und in der That sind uns bis jetzt auch aus jener Zeit keine umfassenderen Tabellen dieser Art, wie er sie zur Berechnung seiner Hilfstafel nötig gehabt hätte, bekannt geworden; im Gegenteile mufste Peurbach's Tafel noch ziemlich lange auch zu rein trigonometrischen Rechnungen herhalten[2]).

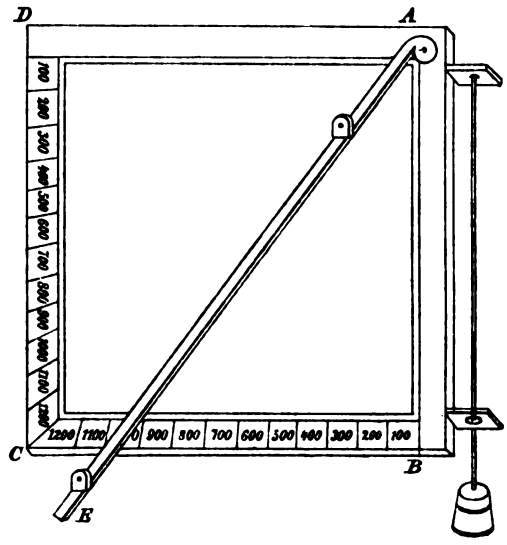


Fig. 32.

1) Näheres über die Geschichte des geometrischen Quadrates und seinen Zusammenhang mit den ähnlichen Mefsinstrumenten jener Zeit in: M. Curtze, „Über die im Mittelalter zur Feldmessung benützten Instrumente". Biblioth. math. 1896. 65—72. — 2) So bediente sich ihrer noch 100 Jahre später Joh. Schöner (Scripta Joannis Regiomontani de Torqueto, Astrolabio etc. Item libellus M. Georgii Peurbachii de quadrato geometrico. Norimb. 1544 in 4°) in seinen Noten zum Jakobstab c^a 35 und Gemma Frisius (De radio astronomico et geometrico liber. Cap. XV. Antwerp. 1545) zur Berechnung des spitzen Winkels A des bei E rechtwinkligen Dreieckes AEB, sowie des Winkels an der Spitze A des gleichschenkligen Dreieckes ABC, in welchem das Ver-

Peurbach war jedenfalls ein sehr talentvoller und verdienter Mathematiker, und doch liegt der Schwerpunkt seiner Leistungen nicht gerade auf dem Gebiete unserer Wissenschaft, sondern auf dem der Astronomie. Er schuf nämlich eine Bearbeitung der Ptolemäischen Planetentheorie, nach welcher überall gelehrt wurde, und die ihre Herrschaft bis zum Untergang des Ptolemäischen Systems behauptete.

Blicken wir noch einmal zurück auf den Stand unserer Wissenschaft im 14. und 15. Jahrhundert, so bemerken wir, dafs die schon im 13. Jahrhundert von Spanien überkommene arabische und griechische Trigonometrie allmählich Gemeingut der Astronomen im Abendlande wurde und sogar nach einigen Richtungen hin, wenn auch nur langsam, eine gewisse Ausbildung erfuhr, obwohl sie noch lange nicht die Höhe erreichte, die sie längst bei den Ostarabern gewonnen hatte. Ein rascheres Tempo schlug diese Entwickelung erst mit dem Auftreten Regiomontans, des grofsen Schülers von Peurbach an, mit dem für uns ein neues Zeitalter, das der Wiedergeburt der mathematisch-astronomischen Wissenschaften im Abendlande, beginnt.

7. Kapitel.

Die Wiedergeburt der Wissenschaften in Europa.

§ 1. Johannes Regiomontanus.

Johannes Müller[1]), der als der Sohn eines Müllers am 6. Juni 1436 in dem Städtchen Königsberg bei Hafsfurt geboren ist und sich der damaligen Sitte gemäfs nach seinem Geburtsorte Johann de Monte Regio oder Regiomontanus nannte, kam mit 15 Jahren zu Peurbach, mit der Bitte, ihn als Schüler annehmen zu wollen. Dieser nahm ihn auch auf und behielt ihn als treuen Mitarbeiter in seiner nächsten Umgebung, solange er lebte. Nach seinem Tode aber übernahm Regiomontan die unvollendeten Arbeiten seines Meisters zur Weiterführung. Darunter befand sich die dem Peur-

hältnis der Höhe AE zu BC durch Beobachtung mittelst jenes Instrumentes gegeben ist. Allerdings rechneten beide unrichtig $AE : BC = 1200 : \operatorname{tg} \sphericalangle BAC$ statt $AE : \frac{BC}{2} = 1200 : \operatorname{tg} \sphericalangle \frac{BAC}{2}$. Auf diesen Fehler hat dann Nonius (Opera. Basil. 1566 p. 74) aufmerksam gemacht. Vgl. Pfleiderer, Ebene Trigonometrie 133.

1) Vgl. für R. Leben: Cantor II. 233 ff., woselbst sich die nötige Litteratur angeführt findet.

bach von Kardinal Bessarion aufgetragene Übersetzung des Almagest aus der Ursprache ins Lateinische, an deren Vollendung jener durch seinen plötzlichen Tod gehindert worden war. Bessarion nahm den jungen Gelehrten als Begleiter mit nach Rom, wo er Gelegenheit fand, sich mit der griechischen Sprache vertraut zu machen, in der er es nachmals zu hoher Vollendung brachte. Teils in der Begleitung des Kardinals, der als päpstlicher Legat beständig seinen Aufenthalt wechselte, teils allein bereiste er Italien, kam nach Viterbo, Ferrara, Padua und Venedig und trat mit allen bedeutenderen Astronomen, namentlich mit Bianchini, in wissenschaftliche Beziehungen. Für uns bemerkenswert ist es, dafs er in Padua im Jahre 1464 eine Vorlesung über den arabischen Astronomen Al-Fergâni hielt, weil daraus hervorgeht, dafs er sich schon damals lateinische Übersetzungen der astronomischen Werke der Araber verschaffte, denen er, wie sich zeigen wird, seine trigonometrischen Kenntnisse zum gröfsten Teil entnahm. In demselben Jahre arbeitete er auch in Venedig an seinem Werke „De triangulis omnimodis libri quinque", das er schon in Rom begonnen hatte, und das später so enormen Einfluſs auf die Entwickelung der Trigonometrie gewann. 1468 nach Wien zurückgekehrt, hielt er daselbst privatim Vorlesungen und folgte dann einem Rufe des Ungarkönigs Mathias Corvinus, für den er in Ofen eine reiche Bibliothek ordnete. Dort entstanden seine „Tabulae directionum". Aber schon 1471 finden wir ihn weit von Ofen in der freien deutschen Reichsstadt Nürnberg, wo er hauptsächlich durch die Liberalität des reichen Patriziers Bernhard Walther (1430—1504) in den Stand gesetzt wurde, seine Lieblingsidee, die Verbesserung der astronomischen Hilfsmittel, auszuführen. In der Rosengasse richtete ihm Walther eine Sternwarte, eine Werkstätte und eine Druckerei ein, aus der als eines der ersten Werke die Planetentheorie seines geliebten Lehrers Peurbach hervorging. Doch auch hier, wo er sich dauernd hatte niederlassen wollen, war seines Bleibens nicht lange, denn schon 1475 wurde er von Papst Sixtus IV. zur Reform des Kalenders nach Rom berufen, wo er bereits am 6. Juli des folgenden Jahres, erst 40 Jahre alt, starb. In der kurzen Spanne Zeit, die diesem Manne zur Bethätigung seiner vorzüglichen Fähigkeiten gegönnt war, hat er so Grofses geleistet, dafs er alle seine Zeitgenossen überragt und als ein Markstein steht am Beginne der neuen Zeit.

Was nun speziell unsere Wissenschaft anlangt, so haben wir eine zweifache Thätigkeit Regiomontan's zu unterscheiden. Einmal war sein Augenmerk auf die Verbesserung der Tafeln für trigonometrische Rechnung gerichtet, und dann hat er für das Abendland

geleistet, was Nasîr Eddîn bereits zwei Jahrhunderte früher für das Morgenland zustande gebracht hatte, nämlich eine einheitliche Begründung und systematische Anordnung der trigonometrischen Lehren. Nach diesen zwei Richtungen haben wir seine Thätigkeit näher zu beleuchten.

Wir sahen schon, dafs Johann von Gemunden und Peurbach Sinustafeln berechneten, die von 10 zu 10 Minuten fortschritten, und deren Radius sie gleich 600000 setzten, aufserdem hatte auch der oben erwähnte Bianchini, Professor der Astronomie in Ferrara, bereits um 1463 solche für den Radius 60000 geschaffen[1]), die aber nur durch Abschrift in die Hände Weniger gekommen waren. Regiomontan suchte noch gröfsere Genauigkeit zu erzielen, indem er drei Sinustabellen herstellte, die von Minute zu Minute fortschreiten. Die eine[2]) ist mit dem Radius 60000, die zweite für $r = 6000000$ berechnet, so dafs also auch hier noch eine Vermengung des sexagesimalen mit dem dezimalen System, wie bei Peurbach, stattfindet. Die dritte Tafel aber ist bereits für den Radius 10^7 berechnet[3]), und zwar hat Regiomontan diese Neuerung mit voller Erkenntnis ihres Wertes eingeführt, indem er in einer Stelle[4]) seiner „Tabulae directionum" ausdrücklich bemerkt, dafs hierdurch die Rechnung vereinfacht werde. Die zweite dieser Tafeln wollte er den Büchern über die Dreiecke anhängen[5]), was aber bei der erst nach seinem Tode erfolgten Herausgabe derselben durch Johann Schöner unterblieb. Den beiden letzten Tabellen ist eine Einleitung vorausgeschickt, in welcher die Berechnungsweise der ersteren auseinandergesetzt wird, während die letztere darin gar nicht erwähnt wird, ein Umstand, der auf ihre weit spätere Entstehung hinweist.

Regiomontan's Methode zur Berechnung der zweiten Tafel ist folgende: Er bestimmt zunächst die Sinusse der ersten sechs Kardagen (von 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°), um gröfsere Genauigkeit zu erzielen, für den Radius 60000000 und findet dann durch die bekannte Halbierungsformel die Sinusse der Hälften und Viertel dieser

---

1) Tiraboschi erwähnt in seiner Storia della letteratura Italiana 1780. XV. 270, dafs sich ein Manuskript von ihm „De Sinibus" in der Bibliothek zu Modena findet. — 2) Diese bisher wenig beachtete Tafel ist der uns vorliegenden Ausgabe der Tabulae directionum (vgl. weiter unten) als Separatbändchen beigegeben. Auf sie beziehen sich die Lösungen von Problemen dieser Tafeln. — 3) Die beiden letzterwähnten Tabellen sind der Schrift Peurbach's, die wir S. 116 zitierten, angehängt. — 4) In der 10. der dieser Tabelle vorhergeschickten Aufgaben steht: „Facilius tamen idem efficies si tabula tua maximum sinum habeat: 100000", was dann noch weiter begründet wird. — 5) In der Vorrede zu „De triangulis omnimodis libri quinque" bemerkt er dies pag. 6 selbst.

Bögen sowie ihrer Komplemente; soweit stimmt seine Methode mit der indisch-arabischen überein. Hierauf folgt eine zweite Reihe von Sinussen, die aus der Zehnecks- und Fünfecks-Seite mit dem Verfahren des Ptolemäus gewonnen werden. Der sin 1° aber wird durch eine Methode gefunden, die im Prinzip völlig mit jenem Interpolationsverfahren stimmt, das wir bei Abû'l Wafâ (S. 56—57) kennen gelernt haben, und das sich auch bei Ulûg-Beg findet. Nur zieht Regiomontan die Grenzen weniger eng als sein Vorgänger, indem er sin 1° aus der Ungleichung:

$$\sin \tfrac{3}{4}^0 + \tfrac{1}{3} \sin \tfrac{3}{4}^0 > \sin 1^0 > \sin \tfrac{3}{4}^0 + \tfrac{1}{3}(\sin \tfrac{6}{4}^0 - \sin \tfrac{3}{4}^0)$$

ableitet[1]), die er ebenso wie jener erhält.

Nun ist die Berechnung der Sinusse von 45′ zu 45′ ermöglicht, auf die die Bestimmung der Sinusse der Winkel, die von 15 zu 15 Minuten, von 5 zu 5 Minuten und schliefslich um eine Minute fortschreiten, folgt. Hierzu bedient er sich der Interpolation mittelst Proportionalteilen, und sucht seinen Resultaten dadurch die nötige Sicherheit zu geben, dafs er für die Rechnung den Radius hundertmal gröfser annimmt, als er ihn schliefslich der Tafel zugrunde legt, und die hiermit erhaltenen Zahlen um zwei Dezimalen kürzt[2]).

Aufser diesen Sinustabellen, die in ihrer Anlage einen bemerkenswerten Fortschritt gegen die damals bekannten Werke ähnlicher Natur zeigen, indem wenigstens in der dritten endlich einmal von dem Gebrauche der Sexagesimalteilung Abstand genommen wird, hat Regiomontan noch eine Tangententafel von Grad zu Grad berechnet und seinen 1490 bei Erhardt Radolt in Augsburg er-

---

1) Dadurch bekommt er für $r = 6 \cdot 10^6 : 10471697 > \sin 1^0 > 10471238$ und hieraus zum halben Winkel übergehend: $5236044 > \sin \frac{1}{2}^0 > 5235818$. Da er nun aber den Radius in der Tafel nur gleich $6 \cdot 10^6$ voraussetzt, so ergibt sich für ihn $52360 > \sin \frac{1}{2}^0 > 52358$, also ohne merklichen Fehler $\sin \frac{1}{2}^0 = 52359$ und hieraus $\sin 1^0 = 104715$. Da Regiomontan den Abûl Wafâ jedenfalls nicht gekannt hat, indem die Schriften desselben erst in unserer Zeit zugänglich wurden, die Übereinstimmung seiner Methode mit jener des Arabers aber doch zu auffällig ist, um an Zufall denken zu lassen, so vermuten wir, dafs er sie in den Schriften des ihm wohlbekannten Al-Zarkâli fand. — Übrigens war ihm auch die direkte Dreiteilung bekannt, wenn er sie auch nie praktisch verwertete. Bianchini stellte ihm nämlich am 5. Februar 1464 die Aufgabe, aus crd 60°, crd 20° zu bestimmen (Chr. Th. Murr, Memorabilia Biblioth. public. Norimbergensium et universit. Altdorfiae; Pars I. 1786. 105. Nr. 7), worauf ihm Regiomontan noch im selben Monat antwortete, dafs es mehrere Lösungen gebe, und zugleich die mitteilte, welche Campanus am Ende des IV. Buches seiner Euklidausgabe angibt (a. a. O. 138. Lösung mittelst der Kreiskonchoide). — 2) Auch Clavius, der sich bei Berechnung seiner Tafel eng an Regiomontan anschliefst, hat sich noch dieses Verfahrens bedient. Opera Crist. Clavii 1611. I.

schienenen nur astrologischen Zwecken gewidmeten „Tabulae directionum profectionumque" einverleibt[1]). Er nennt sie „Tabula foecunda", die Tangenten selbst aber heifsen einfach „numeri" und sind für den Sinus totus 100000 berechnet. Wir wissen von früher, dafs auch im Abendlande Regiomontan keineswegs der erste ist, der Tangententafeln berechnete, doch scheint er sie zuerst zur Herstellung einer Tafel der Rektaszensionen verwendet zu haben, die er aus der Formel: $\sin(t - 90^0) = \operatorname{tg}\delta \cdot \operatorname{tg}\varphi$ bestimmte. Wohl dürften ihn die zu seiner Zeit wohlbekannten Schattentafeln der Araber auf den Gedanken gebracht haben, die Tangenten zu weiteren trigonometrischen Rechnungen zu verwenden.

Endlich hat Regiomontan noch ein Tafelwerk geschaffen, dessen wir hier Erwähnung thun müssen: die „Tabula primi mobilis"[2]). Er nennt sie eine Tafel mit doppeltem Eingang, eine Bezeichnung, die hier wohl zum erstenmale vorkommt[3]). Entstanden ist sie in der zweiten Hälfte des Jahres 1463 zu jener Zeit, da er sich ganz besonders mit der Ausbildung der Trigonometrie beschäftigte[4]). Sie dient dazu, den Sinus eines Winkels zu bestimmen, welcher gleich dem Produkte der Sinusse zweier anderer Winkel ist, und kann somit nicht nur zur Berechnung der Gleichung (I) des rechtwinkligsphärischen Dreieckes dienen, sondern auch auf die Formeln (III) und (V), die bezüglich in der Gestalt $\sin(90^0 - c) = \sin(90^0 - a) \cdot \sin(90^0 - b)$ und $\sin(90^0 - A) = \sin(90^0 - a) \sin B$ zu schreiben sind, angewendet werden, was Regiomontan auch thatsächlich thut.

Schon in dem erwähnten Briefe an Bianchini hat er nämlich 40 Aufgaben der Astronomie erwähnt, die mit dieser Tafel lösbar

---

1) Nach einem Vermerk am Schlusse der Tafeln waren diese schon 1467 vollendet. Es soll auch 1475 eine Ausgabe unter dem Titel „Ludus Pannoniensis quem alias vocare libuit tabulas directionum" erschienen sein, doch ist sie mir nicht zu Gesichte gekommen. Über die astronomische Bedeutung dieser Tafeln siehe Wolf, H. A. I. 437—438. — 2) Tabulae eclypsium magistri G. Peurbachii. Tabulae primi mobilis Joannis de Monte regio etc. herausgegeben von G Tannstetter Collimitius 1514 in 2°, Wien bei Alantsee. — 3) „usus tabulae est intrare cum duobus numeris", vgl. auch Cantor II. 250. — 4) Dies entnehmen wir aus einem Briefe an Bianchini. Cantor ebenda. Noch in einem anderen Briefe an Chr. Roder vom 4. Juli 1471 teilt er diesem mit, dafs er sie erst kürzlich seinem Herrn, dem Mathias Corvinus, gewidmet habe und sie dem Roder schicken wolle. Vielleicht war schon 1471 eine erste Ausgabe erschienen, denn Doppelmayer, Historische Nachricht von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern 1730 in 2°, spricht S. 20 von einer solchen, und Scheibel, Einleitung zur math. Bücherkenntnis. 8°. 1775—81. III. 1. Stück. 11, vermutet, dafs sie 1475 zum erstenmale erschien.

seien. Von diesen sind 36 in die Druckausgabe übergegangen und 27 neu hinzugekommen, woraus nebenbei folgt, dafs die Tafel 1464 noch nicht fertig war[1]). Im Übrigen existiert noch ein anderes, wie es scheint, wenig bekanntes Werk des Regiomontan, welches den Titel führt: „Fundamentum operationum quae fiunt per tabulam generalem: Vel Apodixes et demonstrationes eorum, etc.", das Schöner 1557 in fol. zu Neuburg im Druck herausgab. Während in den 63 dem Tabellenwerk vorausgeschickten Aufgaben nur die Regeln zu ihrer Lösung angegeben werden, sind hier 58 von ihnen eingehend trigonometrisch behandelt. Eine Durchsicht der Schrift zeigte uns, dafs Regiomontan auch die Fundamentalrelationen III und V vom rechtwinkligen sphärischen Dreieck wiederholt in seine Rechnungen mit der Tafel einbezog[2]).

Um die Einrichtung der letzteren kennen zu lernen, wollen wir uns an die Relation $\sin a = \sin c \cdot \sin A$ halten. Die Winkel c wachsen von Grad zu Grad unter der Überschrift: „numeri transversales", die oben auf je einer Folioseite steht, so dafs die Tafel 90 Seiten umfafst. Desgleichen wachsen die A gradweise und stehen unter „numeri laterales" in drei parallelen Spalten auf jeder Seite; der Winkel a findet sich dann nebenan in Graden, Minuten und Sekunden ausgerechnet, und die Resultate sind als „numeri areales" bezeichnet. Die Tafel wird dadurch wesentlich verwendbarer, dafs Regiomontan die zur Interpolation nötigen Differenzen beigesetzt hat. Unter jeder Arealzahl steht nämlich der Unterschied derselben von der nächst höheren, mit „differentia descendens" oder „subjectiva" bezeichnet, während in einer Spalte neben den Arealzahlen unter „differentia lateralis" die Unterschiede der zu einem bestimmten c und A gehörigen Arealzahlen von jenen, die dem nächsthöheren c und demselben A entsprechen, angeführt sind. So hat z. B. der zu $c = 64^0$ und $A = 55^0$ gehörige Teil der Tafel nebenstehende Gestalt.

Transver 64 sales

Lat.	Arcus Areales			Diff. lateralis
Descendens				
g.	g.	m.	s.	m. sec.
55	47	24	46	
		45	29	31 · 25
56	48	10	15	
		44	58	32 · 16

Will man nun z. B. zu $c = 64^0 37'$ und $A = 55^0 43'$ den entsprechenden Wert von a berechnen, so sucht man unter 64 (Trans-

1) Übrigens wird dies auch dadurch bestätigt, dafs in den Aufgaben 43, 44, 60 auch die Tabula directionum erwähnt wird, an die er damals noch nicht dachte. Cantor II. 251. — 2) So z. B. ist die Relation III. in der Aufgabe 5, und Relation V. in der Aufgabe 16 der Tabulae primi mobilis (11 des Fundamentum) angewendet.

versales) und 55 (laterales) das zugehörige a (areales) 47°24′46″ auf. Da die Diff. descendens 45′29″ dem Wachstum des Winkels A um 1° entspricht, so ist sie für 43′ $(45\frac{29}{60} \cdot 43) : 60 = 32'36''$. Ebenso erhält man mittelst der Diff. lat. für 31′25″ den Zuwachs von 19′22″, sodafs sich schliefslich für $a = 48°16'44''$ ergibt. Übrigens zeigt die direkte Rechnung mit irgend einer unserer Logarithmentafeln, dafs die Resultate, die mit Regiomontan's Tafel gewonnen werden, kaum in den Minuten, geschweige denn in den Sekunden zuverlässig sind[1]), was auch bei ihrer Einrichtung nicht Wunder nehmen darf. Sein Gedanke wurde aber, wie wir sehen werden, ein Jahrhundert später wieder aufgegriffen und mit gröfserer Vollkommenheit durchgeführt; ja sogar in unserm Jahrhundert sind noch ähnliche Tafeln geschaffen worden.

Wir kommen nun zu Regiomontan's Verdiensten um die Schöpfung einer selbständigen Trigonometrie. Diese ist enthalten in der berühmten Schrift „De triangulis omnimodis libri quinque", welche in dem schon mehrfach angeführten Briefe an Bianchini vom Januar 64 bereits als nahezu fertig erwähnt wird, im Drucke aber erst lange nach des Autors Tode 1533 erschien[2]).

Obwohl dieses Werk keineswegs, wie man bis vor kurzem noch glaubte, die erste systematische und von der Astronomie unabhängige Zusammenstellung und Ausarbeitung der trigonometrischen Lehren im Abendlande war, so hat es doch, teils weil die früheren uns schon bekannten Arbeiten ähnlicher Art nicht im Drucke erschienen, teils wegen seiner Vollständigkeit und Gediegenheit die wohlverdiente Verbreitung gefunden, und unter seiner Nachwirkung steht die ganze folgende Litteratur in unserer Wissenschaft. Über diesen Umstand wurde es von den für Regiomontan's Gröfse begeisterten Schriftstellern fast durchweg unterlassen, eine genauere Nachforschung darüber anzustellen, was an dem Werke eigene selbständige Schöpfung ist, und was der Gelehrte andern Autoren entlehnt hat. Unterzieht man sich dieser Mühe, so kommt man freilich zu dem Resultate, dafs nur der geringste Teil der Lehrsätze den Stempel eigener Er-

---

1) In unserem Beispiel ergibt die direkte Rechnung mit einer fünfstelligen Tafel 48°17′11′. Regiomontan, der in seiner Einleitung zum Gebrauch der Tafel dieses Beispiel anführt, erhält aber den noch ungenaueren Wert von 16′ und 8″, da er die in seinen Differenzen angegebenen Sekunden bei der Rechnung unberücksichtigt läfst, um aus seiner der Tafel angehängten Tabula manualis direkt die nur für einzelne Minuten berechneten Differenzwerte entnehmen zu können. — 2) Doctissimi viri et mathem. disciplinarum eximii professoris Jo. de Regio Monte de triangulis omnimodis libri quinque. Norimbergae Jo. Petrei 1533. 2°. Ed. Jo. Schoener.

findung an sich trägt, und muſs aus dem Umstande, daſs Regiomontan's Zeitgenossen dies nicht bemerkt zu haben scheinen, notwendig den Schluſs ziehen, daſs seine handschriftlichen Quellen damals nur wenig bekannt und die darin enthaltenen Lehren bereits ganz in Vergessenheit geraten waren. Doch gehen wir auf das Werk selbst näher ein!

Das erste und zweite Buch umfassen die ebene Trigonometrie. Nachdem 19 Sätze, die sich mit den Begriffen über Proportionslehre und ebene Dreiecke beschäftigen, vorausgeschickt sind, beginnt mit dem zwanzigsten Satze des I. Buches die eigentliche Trigonometrie, welche die gewöhnliche Definition des Sinus eines Winkels und seines Komplementes (ein eigener Name für letzteren ist nicht eingeführt) eröffnet. Unter Voraussetzung des sinus rectus totus = 60000 wird dann gezeigt, wie man die sämtlichen Fälle des rechtwinkligen Dreieckes mit Hilfe der Sinustafel behandeln kann[1]). Bemerkenswert ist Satz XXX, welcher zeigt, daſs aus der Kenntnis eines spitzen Winkels im rechtwinkligen Dreieck das Verhältnis der beiden Katheten folgt. Daſs hierbei Regiomontan noch kein Wort über die Tangente beifügt, die er überhaupt in dem ganzen Werke nicht benützt, scheint uns zu beweisen, daſs er erst später[2]) zu ihrer Kenntnis gelangte. Die Sätze XXXVIII—XLI incl. zeigen die Berechnung des gleichschenkligen Dreieckes, und der Rest des I. Buches ist der Behandlung der sämtlichen sechs Fälle des schiefwinkligen Dreieckes gewidmet, die aber hier noch alle durch Zerspaltung desselben in zwei rechtwinklige gelöst werden. Hierbei erkennt er die Doppeldeutigkeit des Falles, in welchem zwei Seiten und der der gröſseren von ihnen gegenüberliegende Winkel bekannt sind, was wir bei Na îr Eddîn vermissen.

Die in diesem ersten Buche verwendete Methode läſst sich als eine Umsetzung der Sehnenmethode der Griechen in eine Sinustrigonometrie des rechtwinkligen Dreieckes charakterisieren, wie sie schon Levi ben Gerson geleistet hatte, und die Regiomontan für die Behandlung sämtlicher Fälle der ebenen Dreiecke fruchtbringend zu verwerten verstand.

1) Z. B. Satz XXIX lib. I. Gegeben $\sphericalangle abc = 36°$, $ab = 20$ Fuſs in dem bei c rechtwinkligen Dreiecke abc, dann ist $\sphericalangle bac = 54°$. Aus der Sinustafel folgt $ac = \sin 36° = 35267$, $bc = \sin 54° = 48541$. Das wären die gesuchten Seitenlängen, wenn $ab = 60000$ wäre, da hierfür aber 20 Fuſs gegeben ist, so ist jede dieser Zahlen mit 20 zu multiplizieren und mit 60000 zu dividieren. Das gibt für $ac = 11\frac{3}{4}$ Fuſs (fere) und für $bc = 16\frac{11}{60}$ Fuſs. — 2) Delambres' Bemerkung Hist. de l'Astr. du moyen âge 310, daſs er damals schon die Tangententafel hatte und sie nur nicht für trigonometrische Rechnung zu benutzen verstand, können wir nicht beipflichten.

An der Spitze des II. Buches erscheint nun der Sinussatz, der ebenso präzis ausgesprochen[1]) und genau in derselben Weise wie bei Nasîr Eddîn bewiesen wird. Die Kenntnis dieses Satzes schöpfte Regiomontan ebenfalls aus Levi ben Gerson's Schrift, denn es wurde, wie schon erwähnt, nachgewiesen, dafs er im Besitze einer Abschrift derselben war. Im weiteren Verlaufe wird dieser Hauptsatz zur Lösung verschiedener, zum Teile schwieriger Dreiecksaufgaben angewendet, z. B. „Aus der bekannten Summe zweier Dreiecksseiten und den ihnen gegenüberliegenden Winkeln die Seiten des Dreieckes zu bestimmen“[2]), oder: „Aus dem Dreiecksumfang und zwei Winkeln die Seiten zu bestimmen“[3]). Wir teilen hier nur die Lösung der Aufgabe 25: „Aus gegebener Basis und Höhe sowie dem Gegenwinkel der ersteren die beiden anderen Seiten zu bestimmen“ mit, um zu zeigen, wie Regiomontan durch geschickte Konstruktion das Fehlen des Cosinussatzes zu ersetzen versteht.

Dem Dreieck abg, in welchem bg, ad und $\sphericalangle bag$ gegeben sind, wird (Fig. 33) der Kreis umschrieben und $bk \perp ga$ gefällt, dann ist $ba : bk$ bekannt, da $\sphericalangle bak$ gegeben ist. Es ist aber $ba : bk = ba \cdot ag : bk \cdot ag$, und da $bk \cdot ag = 2\triangle abg = bg \cdot ad$ bekannt ist, so ist aus dieser Proportion auch $ba \cdot ag$ bestimmbar. Da man aber ad hat, so folgt hieraus die Kenntnis des Durchmessers pq (aus $\triangle abd \sim \triangle agz$ ist nämlich $ba : ad = az : ag$ u. s. w.) und des Radius eg, sowie $me = \frac{1}{2}pq - ad = nd$. Hiermit aber $an = nd + da$, und somit aus dem rechtwinkligen $\triangle ane$ auch $ne = dm$. Subtrahiert, resp. addiert man dies zu $bm = \frac{1}{2}bg$, so bleiben die Abschnitte bd und dg als bekannt übrig, die mit der bekannten Höhe ad die Kenntnis der Seiten vermitteln. Wir würden etwa mittelst des Cosinussatzes so verfahren: Es ist $ab^2 + ag^2 = bg^2 + 2ab \cdot ag \cos\alpha$, aber $ab \cdot ag \sin\alpha = 2\triangle abg = bg \cdot ad$ und somit $ab^2 + ag^2 = bg^2 + 2ad \cdot bg \cdot \operatorname{ctg}\alpha$ bekannt, und ebenso $ab \cdot ag = \frac{ad \cdot bg}{\sin\alpha}$. Hieraus durch Lösung dieser beiden Gleichungen ab und ag algebraisch[4]).

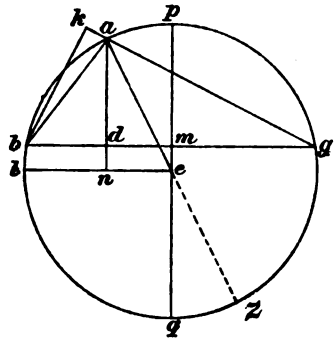


Fig. 33.

Satz XXVI löst die Aufgabe: „Den der Basis des Dreieckes

1) In omni triangulo rectilineo proportio lateris ad latus est, tamquam sinus recti anguli alterum eorum respicientis, ad sinum rectum anguli reliquum latus respicientis. — 2) A. a. O. Prop. II. — 3) Prop. VII. — 4) Delambre hat a. a. O. p. 303 eine andere Lösung gegeben.

gegenüberliegenden Winkel zu berechnen, wenn das Produkt der ihn einschliefsenden Seiten und die Fläche des Dreieckes bekannt sind." Hier ist implicite wohl zum erstenmale die Existenz der Formel $\triangle = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$ erkannt, wenn auch nicht direkt ausgesprochen[1]).

Aufser diesen und ähnlichen auf geometrischem Wege gelösten Aufgaben enthält das II. Buch unter seinen 33 Sätzen aber noch zwei, die algebraisch behandelt sind und deshalb besonderes Interesse erweckten[2]). Da sie aber gerade deshalb für uns weniger Bedeutung haben, so lassen wir sie beiseite und wenden uns zum III. Buche.

Dieses zeigt weit weniger Originalität als die vorhergehenden, denn seine 56 Sätze, die über Sphärik handeln, sind teils den Büchern des Menelaus über die Kugel, teils, und sogar einschliefslich der Figuren, aus dem Werke des Arabers Dschâbir (Geber) entnommen, und zwar ohne dafs Regiomontan irgendwo seine Quellen anführt[3]). Hierin handelte er übrigens nach einem zu seiner Zeit ziemlich allgemein gebräuchlichen Verfahren: man nahm eben damals das Gute, wo man es fand und gab sich oft nicht einmal die Mühe, ihm ein neues Gewand umzulegen.

Jene Sätze aus Dschâbir's Schrift, welche nicht im III. Buch Platz fanden, gingen sämtlich in das IV. Buch Regiomontan's über. Darunter sind besonders Prop. XV, XVI und XVII zu bemerken, denn der erstere Satz ist die Regel der vier Gröfsen und die beiden anderen umfassen den Sinussatz für die verschiedenen Gattungen des sphärischen Dreieckes. Wortlaut der Sätze und Gedankengang der Beweise stimmen bis auf unbedeutende Kleinigkeiten völlig mit dem XII. und XIII. Satze Geber's überein, und die Figuren sind, teilweise sogar mit denselben Buchstaben, aus jenem herübergenommen, nur hat Regiomontan zwei Figuren mehr, welche speziellen Fällen des rechtwinkligen Dreieckes entsprechen. An den Sinussatz schliefst er, wie Geber, die Ableitung jener

---

1) R. Wolf, H. A. I. 179. — 2) Es sind dies die Aufgaben XII und XXIII Vgl. bezüglich ihrer Lösung Cantor II. 246—247. Die in Satz XXIII angeführte Gleichung, welche Cantor daselbst ableitet, ist übrigens nichts anderes, als der erweiterte Pythagoräische Lehrsatz. Bezüglich der Litteratur vgl. auch Chasles Gesch. der Geometrie, Deutsch v. Sohncke 619—620, und S. Günther, Geschichte des mathematischen Unterrichtes im Mittelalter 243 und Anmerkung 2, der zuerst bemerkte, dafs die Aufgabe XII für Regiomontan's Zahlen imaginäre Lösungen gibt. — 3) Einen genauen Nachweis hierfür haben wir in unserem Aufsatze: „Naṣîr Eddîn Tûsi und Regiomontan." Abhandl. der k. Leopold. Kar. Akademie 1897. LXXI. p. 59 gegeben.

V. Relation an, die des Letzteren Namen führt und nimmt ihren Beweis, sowie den der III. Relation aus Dschâbir herüber[1]), indem er nur seine Ausführungen auf verschiedene Gattungen sphärischer Dreiecke ausdehnt. Satz XX hingegen scheint ihm selbst anzugehören, obwohl sich ein ähnlicher bereits bei Menelaus findet[2]). Er lautet: „Fällt man von der Spitze a eines beliebigen sphärischen Dreieckes abg einen senkrechten Bogen ad auf seine Basis, so besteht die Gleichung $\sin \sphericalangle gad : \sin \sphericalangle bad = \cos g : \cos b$." Der Beweis wird in eleganter Weise erbracht, indem arc. da zum Quadranten de ergänzt wird, dann ist e der Pol von Bogen bg, und mittelst des Sinussatzes folgt aus den Dreiecken eba und ega, $\sin abe : \sin bae = \sin ea : \sin eb$ und $\sin \sphericalangle age : \sin \sphericalangle gae = \sin ea : \sin ge$. Aber $be = ge = 90^0$, $\sphericalangle abe = 90^0 - b$, $\sphericalangle age = 90^0 - g$, $\sphericalangle bae = 180^0 - \sphericalangle bad$, $\sphericalangle gae = 180^0 - \sphericalangle gad$, also $\cos b : \sin bad = \sin ea : 1$ und $\cos g : \sin gad = \sin ea : 1$, woraus sich die Richtigkeit des Satzes unmittelbar ergibt.

Die Regel der vier Gröfsen, der Sinussatz, die V. und III. Relation und der zuletzt angeführte Satz sind die fünf Haupttheoreme, auf denen die ganze sphärische Trigonometrie aufgebaut wird, und wenn sich auch in der Schaffung dieser Grundlage wenig Originalität zeigt, so erkennt man doch in der durchsichtigen Anordnung des Stoffes und in der präzisen und klaren Fassung der Sätze ein entschieden didaktisches Talent. Regiomontan's Sinn für Systematik tritt auch in den Anwendungen dieser Theorie, die den Rest des V. Buches bilden, deutlich zutage, ja er ist es, der ihn in dem Bestreben, alle möglichen Fälle, die sowohl beim rechtwinkligen als bei einem beliebigen Dreieck vorkommen können[3]), zu erledigen, völlig von den Fesseln der Astronomie befreit.

Seine Methode in der Behandlung des schiefwinkligen Dreieckes

---

1) Prop. XVIII. 105—107. Prop. XIX. 107—108. — 2) Derselbe lautet: Wenn ad die Halbierungslinie des Winkels a ist, so besteht die Gleichung: $\mathrm{crd}(2ag) : \mathrm{crd}(2ab) = \mathrm{crd}(2gd) : \mathrm{crd}(2bd)$; es ist dies Satz X. lib. III der Sphärik des Menelaus. — 3) In den Sätzen XXV—XXVII incl. werden die sämtlichen Fälle des rechtwinkligen sphärischen Dreieckes (p. 114—118) mit alleiniger Benutzung des Sinussatzes und der Relation von Geber behandelt, in den Nummern XXVIII—XXXIV die 6 Fälle des schiefwinkligen Dreieckes (p. 118—125). Zur Lösung der Aufgabe, aus den drei Winkeln die Seiten zu berechnen, bedient er sich nicht wie Nasîr Eddîn des Supplementardreieckes, sondern seines 5. Hauptsatzes. Ist in Δabg arc. $ad \perp$ arc. bg, so ist nach diesem Satze: $\sin bad : \sin gad = \cos b : \cos g$, also das Verhältnis der Sinusse der beiden Teile des Winkels a bekannt, und da dieser Winkel selbst gegeben ist, so findet man, wie bei Ptolemäus (S. 23), die Winkel selbst. Das Übrige mit der Relation von Geber.

besteht im allgemeinen noch immer in der Zurückführung derselben auf zwei rechtwinklige. Dabei ist zu erwähnen, dafs er auch die Doppeldeutigkeit des Falles bespricht, in welchem zwei Seiten und ein Gegenwinkel bekannt sind[1]), während ihm dieser Umstand im reciproken Falle entgeht[2]). Eine Ausnahme von der Methode der Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke macht die Lösung der letzten Aufgabe des IV. Buches (Prop. XXXIV), welche die Winkel aus den drei Seiten zu berechnen lehrt. Diese wird auf ganz originelle Weise behandelt, die direkt weder den Griechen, noch den Arabern entstammt[3]), indem das Problem darauf reduziert wird, einen Winkel des Dreieckes mittelst orthographischer Projektion durch seinen Neigungswinkel am Kugelmittelpunkt zu bestimmen[4]).

Aber er greift die Aufgabe auch noch auf eine zweite Art an, indem er sich der Regel der vier Gröfsen bedient, und gelangt so genau zu derselben Lösung, die wir bei Nasîr Eddîn kennen lernten (S. 69). Der innige Zusammenhang seiner beiden Lösungen ist leicht zu erkennen, und Regiomontan wurde zweifelsohne von einer auf die andere geführt.

Die vier ersten Bücher über die Dreiecke, welche wir kurz beschrieben haben, stellen ein in sich abgeschlossenes Lehrgebäude der Trigonometrie dar, das man als eine Sinustrigonometrie bezeichnen könnte, indem nur diese eine Funktion benutzt wird. Von ihnen sind offenbar das erste, zweite und vierte noch während Regiomontan's Aufenthalt in Italien aus einem Gusse entstanden, während

---

1) 119—120. Satz XXIX und XXX. a. a. O. — 2) Ebenda Satz XXXII. 120—121. — 3) Wir sahen wohl, dafs schon Al-Battâni in einem speziellen Falle einen Winkel aus den drei Seiten berechnete, aber dies geschah mit der Methode des Analemmas, welche mit der vorliegenden direkt nichts gemein hat. Auf sie kommt R. erst im V. Buche zu sprechen. — 4) Die Lösung ist folgende: Man sucht $\sphericalangle a$ in Dreieck abg (Fig. f). Ergänzt man ag und ab zu Quadranten und verbindet das Zentrum z der Kugel mit den Endpunkten d und e jener Bögen, sowie mit a, so ist $\sphericalangle dze = \sphericalangle a$. Sei $gh \perp ze$, $bk \perp zd$, $gl \perp az$, $bm \perp az$, also $dz \parallel bm$, dann ist $hz = lg = \sin ag$, $kz = bm = \sin ab$ bekannt. Macht man jetzt $hn = bk$ und zieht bn und bg, so ist in dem ebenen rechtwinkligen Δbgn, bg als Sehne des Bogens bg bekannt und $gn = gh - bk = \sin ge - \sin bd = \cos ag - \cos ab$ ebenfalls. Somit kann man die Seite $bn = hk$ finden. Dann kennt man aber in dem ebenen Dreieck zhk die drei Seiten und findet hieraus leicht $\sphericalangle hzk = a$.

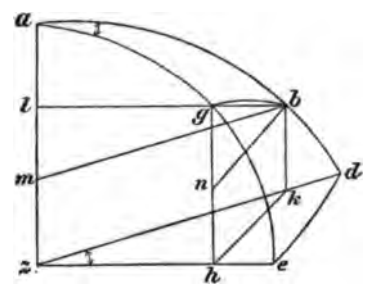


Fig. f.

das dritte mit seinen für das Verständnis der übrigen notwendigen Sätzen erst später eingefügt wurde, und wenn auch die vom zweiten Buche ab fehlenden Nummern bei den Rückweisen auf vorhergehende Sätze zeigen, dafs er noch nicht die letzte Hand an ihre Redaktion gelegt hatte, so läfst sich doch schliefsen, dafs eine solche nichts Wesentliches mehr geändert haben würde. Wenig zu diesem ganzen System aber pafst das nur aus 15 Sätzen bestehende und keinenfalls vollendete V. Buch[1]). Dasselbe ist zweifellos erst nach Abschlufs der vier ersten Bücher entstanden und war dazu bestimmt, die Verwendbarkeit einiger neuer Methoden darzuthun, die Regiomontan entwickelt hatte, nachdem er in der Zwischenzeit den Al-Battâni kennen gelernt. Darauf weisen verschiedene Anzeichen hin.

Zunächst erscheint gleich im zweiten Satze[2]) eine neue Funktion, der „Sinus versus", und zwar wird derselbe ohne vorhergehende Definition verwendet, um unsern zweiten Hauptsatz der sphärischen Trigonometrie, den sogenannten Cosinussatz, zum erstenmale als eine Regel zu formieren, die zur Berechnung eines jeden sphärischen Dreieckes dienlich ist. In der ganzen uns bekannten Litteratur aus Morgen- und Abendland findet sich nämlich keine Stelle, welche darauf hindeuten würde, dafs schon irgend jemand vor Regiomontan auf den Gedanken kam, aus der vielverwendeten Projektionsmethode, deren sich die Griechen, Inder und Araber von Fall zu Fall bedienten, jenen einen Satz herauszukrystallisieren, der den analytischen Kern jener Methode bildet. Dieses Verdienst mufs nach unserer Ansicht Regiomontan ganz allein zugesprochen werden. Thatsächlich hat er ihn aber auch aus jener Projektionsmethode herausgefunden und zwar aus den Sätzen des Al-Battâni. Wir haben schon früher[3]) erwähnt, dafs er eine Ausgabe des Buches über die Sterne nach der Übersetzung Plato's von Tivoli vorbereitete, die er mit Noten versah, und welche 1537 zugleich mit den „Rudimenta astronomiae Alfragani" im Druck erschien. In einer[4]) dieser sechs Noten, die wir einer genauen Durchsicht unterzogen, hat er der Methode des Al-Battâni

1) Dafür, dafs R. Dreiecksbücher keineswegs vollendet sind, finden wir das Zeugnis des später zu besprechenden Joh. Werner. Derselbe sagt in einem 1514 zu Nürnberg herausgegebenen Sammelbande geographischer Schriften: „Denique libros quinque de sphaericis omnimodis triangulis a se tumultuarie nulloque recto ordine servato: velut in prima rerum inventione fieri solet: perscriptos: constat morte praeventum imperfectum reliquisse." (Brief Werner's an den Kardinal Mathäus Gurk.) — 2) Satz I, den Delambre für R. reklamieren will (a. a. O. 310), steht bereits bei Menelaus lib. III. prop. XXIII. — 3) Seite 48 Anmerk. 5. — 4) Rudimenta etc. cart. 16r.

folgend einen der fehlenden Beweise desselben mit grofsem Geschicke restituiert; und genau desselben Verfahrens und der nämlichen Figur bedient er sich zum Beweise jenes II. Satzes in seinem V. Buche, so dafs kein Zweifel mehr bestehen kann, dafs er beim Studium des Albategnius zu diesem Lehrsatze geführt wurde.

Der Wortlaut, in dem Regiomontan seinen Satz ausspricht, ist durch die für ein Dreieck ABC gültige Formel

$$\text{sinvers } A : (\text{sinvers } a - \text{sinvers } (b - c)) = r^2 : \sin b \cdot \sin c$$

ausgedrückt, wo $r =$ sintotus $=$ dem Radius der Kugel gesetzt wurde. Zur Ableitung dieser Gleichung gibt er zwei Figuren, die sich in unserer Fig. 15 (S. 39) vereinigt finden. In derselben ist $\triangle ZP\Sigma$ das Dreieck, für welches der Satz aufgestellt werden soll, die Konstruktion ist aus der Figur unmittelbar ersichtlich und der Beweis nimmt in etwas kürzerer Fassung folgende Gestalt an:

Zunächst ist

$$\text{arc. } ZD = \text{arc. } P\Sigma - \text{arc. } PZ; \quad \text{arc. } ZL = \text{arc. } Z\Sigma; \quad \text{arc. } EQ = \sphericalangle ZP\Sigma;$$

ferner

$$1) \quad EQ' = \text{sinvers } (EQ) = \text{sinvers } \sphericalangle ZP\Sigma.$$

Fällt man noch $DW \perp CZ$, $PU \perp CZ$ und $DT \perp LM$, so ist

$$ZW = \text{sinvers } DZ, \qquad ZK = \text{sinvers } ZL = \text{sinvers } Z\Sigma;$$

ferner folgt:

$$2) \quad DT = WK = ZK - ZW = \text{sinvers } Z\Sigma - \text{sinvers } DZ$$

und $\quad 3) \quad DB = \sin PD = \sin P\Sigma, \qquad 4) \quad PU = \sin PZ;$

Aber es ist, wie unmittelbar ersichtlich:

$$EQ' : D\Sigma' = r : BD \quad \text{und} \quad D\Sigma' : DT = r : PU,$$

somit:

$$EQ' : DT = r^2 : BD \cdot PU.$$

Setzt man hier die Werte aus den Gleichungen 1) bis 4) ein, so kommt:

$$\text{sinvers } ZP\Sigma : (\text{sinvers } Z\Sigma - \text{sinvers } (P\Sigma - PZ)) = r^2 : \sin P\Sigma \cdot \sin PZ,$$

eine Gleichung, die sofort die oben angegebene Form annimmt, wenn man die Buchstaben P, Z, Σ der Reihe nach durch A, B, C ersetzt und die Seiten des Dreieckes ABC mit a, b, c bezeichnet. Für $r = 1$ und Einführung der Cosinusse geht diese Gleichung unmittelbar in die jetzt gebräuchliche Formel über.

Benützt wird der Satz von Regiomontan nur, um einen Winkel aus den drei Seiten zu finden[1]), wofür er sofort noch eine andere

1) lib. V. prop. III. p. 129.

Lösung angibt[1]), die aber genau mit jener in prop. XXXIV, lib. IV gegebenen übereinstimmt.

Die übrigen Sätze des fragmentarischen V. Buches sind von untergeordneter Bedeutung für die Theorie, weshalb wir nicht weiter auf sie eingehen[2]).

Mit Regiomontan's fünf Büchern über die Dreiecke beginnt zweifelsohne die „neue Zeit" für die Entwickelung der Trigonometrie als selbständiger Wissenschaft, und wenn auch in ihnen die Fülle des Materials noch nicht wiedergewonnen war, das wir bereits in den Werken der Ostaraber niedergelegt und mit Geschick für astronomische Zwecke verwendet sahen, so war doch wieder ein sicheres Fundament geschaffen, auf dem eine Weiterbildung der von dem grofsen Astronomen gesammelten und ausgearbeiteten Lehren möglich war. Leider hatte ihn der Tod, der ihn in der Blüte seiner Mannesjahre hinwegraffte, verhindert, sein Werk selbst im Druck zu veröffentlichen, und wenn auch manche seiner Lehren mündlich bekannt geworden zu sein scheinen, so kann man von einer umfassenden und fruchtbringenden Einwirkung derselben doch erst reden, nachdem sie im Laufe des 16. Jahrhunderts, namentlich durch das Verdienst Johann Schöner's in Nürnberg, allgemein bekannt geworden waren.

Dafs mit der Herausgabe so wichtiger Schriften so lange gezögert wurde, hatte seinen Grund in dem eigentümlichen Schicksal, das Regiomontan's handschriftlicher Nachlafs erfuhr[3]). Seinem Nürnberger Freunde, Mäcen und Schüler, dem schon genannten Bernhard Walther, hatte nämlich Regiomontan, als er seine Romreise antrat, sein ganzes wissenschaftliches Hab und Gut anvertraut, und als er nicht mehr heimkehrte, da hielt Walther dasselbe ängstlich verschlossen, ohne es auch nur irgend jemandem sehen zu lassen. So blieb alles unbenützt liegen, bis jener 1504 starb. Jetzt wurden aber die wertvollen Handschriften ebenso leichtfertig verstreut, wie sie vorher zu gewissenhaft aufbewahrt worden waren; dabei scheint manches zugrunde gegangen zu sein, und nur der Fürsorge des Nürnberger Patriziers Willibald Pirkheimer, dessen Haus im

1) Prop. IV. 129—131. — 2) Satz VII. p. 131—132, welcher angibt, dafs wenn ein Winkel eines sphärischen Dreieckes durch einen Grofskreisbogen halbiert wird, sich die Sinusse der Abschnitte der Gegenseiten, wie die Sinusse der ihnen anliegenden Dreiecksseiten verhalten, wurde von Delambre (a. a. O. 314) und Günther (Geschichte des math. Unterrichtes im deutschen Mittelalter p. 246) bisher dem Regiomontan zugeschrieben, findet sich aber schon bei Menelaus (Ed. Maurolycus lib. III. prop. X). — 3) Wir schliefsen uns hier an Cantor II. 242 an. Vgl. auch: Doppelmayr, Von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern. Nürnberg. 1730. 25 und 26.

16. Jahrhundert der Zentralpunkt des wissenschaftlichen und künstlerischen Lebens in der freien Reichsstadt war, ist es zu verdanken, dafs die Bücher über die Dreiecke, welche jener ankaufte, auf uns gekommen sind.

§ 2. Regiomontan's Epigonen.

Wohl erschien Regiomontan's Werk über die Dreiecke erst 57 Jahre nach seinem Tode im Drucke, aber wir erwähnten schon, dafs die Kunde von ihm, sowie Einzelnes aus seinem Inhalt, sowohl durch seinen Briefwechsel, als auch durch mündliche Mitteilung in die gelehrten Kreise gedrungen war. Es darf daher kein Wunder nehmen, dafs der Gedanke einer selbständigen Begründung der trigonometrischen Lehren sofort von anderen aufgegriffen und ausgeführt wurde.

Zu dem Pirkheimer'schen Kreise in Nürnberg gehörte ein gewisser Johannes Werner (1468—1528), Pfarrer von St. Johann daselbst, der neben seinen Amtsgeschäften sich mit besonderer Vorliebe und grofsem Geschick mit geographischen und mathematischen Studien befafste. Dieser schrieb eine sphärische Trigonometrie in 5 Büchern unter dem Titel: „De triangulis per maximorum circulorum segmenta constructis libri V", für die er aber leider keinen Verleger fand, obwohl sie, nach den andern uns noch erhaltenen Schriften Werner's zu urteilen, sicher ebenso wertvoll als vollständig war[1]). Wir wissen von diesem Werke nur, dafs es nach dem Tode des Verfassers[2]) in die Hände des Nürnberg'schen Mechanikers Georg Hartmann[3]) überging und von diesem an einen gewissen Georg Joachim Rhaeticus, Professor der Mathematik in Wittenberg kam, welcher sich anfangs Mai 1542 in Nürnberg aufhielt und mit den dortigen Mathematikern Bekanntschaft machte. Bei dem bedeutenden Einflusse, den des letzteren Werke, wie sich zeigen wird, auf die spätere Entwickelung unserer Wissenschaft ausübten, mufs dieser Umstand gebührend hervorgehoben werden, wenn wir auch nicht mehr imstande sind, direkt nachzuweisen, ob und wieviel Rhäticus von seinem Vorgänger entlehnte.

---

1) So kennt z. B. Werner sehr wohl die Verwendung der Tangenten, deren er sich bei Verbesserung des Jakobstabes unter Benützung der Tabula foecunda Regiomontan's in seinen Noten zur Geographie des Ptolemäus bedient. Vgl. hierüber auch: S. Günther, Studien zur Gesch. der math. und phys. Geographie 1877. 289. — 2) Vgl. hierüber Doppelmayr a. a. O. 34. Note (cc) und 59. (yy), auch Cantor II. 417. — 3) Hartmann (1480—1545), Vikar an der Sebalduskirche in Nürnberg, gilt als der Entdecker der Inklination der Magnetnadel.

Wenn uns nun leider aus diesem für die Geschichte so wichtigen Werke des Nürnberger Pfarrers nichts mehr direkt zugänglich ist, indem das Manuskript verloren ging, so hat sich doch noch eine Sammlung von Schriften Werner's erhalten, aus denen wir einiges über seine trigonometrischen Kenntnisse entnehmen können. Der 1514 von ihm selbst herausgegebene Sammelband umfaſst 7 Schriften geographischen Inhaltes, worunter sich die Bruchstücke eines von dem Griechen Georgio Amirucio[1]) stammenden Werkes befinden, die Werner ins Lateinische übersetzte und mit erklärenden Noten versah. „De his quae geographiae debent adesse: Georgii Amirucii Constantinopolitani opusculum" betitelt Werner die Schrift, aus welcher uns nur die Behandlung der Aufgabe interessiert, „Die Entfernung zweier durch ihre geographische Länge und Breite gegebener Orte auf der Erde in Graden jenes gröſsten Kreises zu bestimmen, der sie verbindet". Amirucius führt die Lösung auf ebene Dreiecke zurück, indem er die durch die beiden Orte c und d (Fig. 34) gehenden Meridiane $adb = ac$ zieht, arc. ad = arc. ae und arc. db = arc. ec macht. Legt man dann noch die beiden Parallelkreise de und bc, zieht deren Sehnen sowie die Sehne dc und fällt df und $eh \perp bc$, so sind zunächst die beiden Parallelkreisbögen aus ihren geographischen Längen und Breiten bekannt, und somit ihre Sehnen de und bc; ferner kennt man arc.bd = arc.ac — arc.ad, und somit Sehne bd. Da aber $bf = \frac{1}{2}(bc - de)$ ist, so folgt $df = \sqrt{bd^2 - bf^2}$ und $cd = \sqrt{df^2 + fc^2}$. Hierzu ergibt eine Sehnentafel den gesuchten Bogen. Nebenbei bemerkt scheint dies die erste Lösung dieser Aufgabe ohne Zerlegung in zwei rechtwinklige sphärische Dreiecke zu sein. Werner dehnt dieselbe auf den Fall aus, daſs der eine der beiden Orte auf der nördlichen, der andere auf der südlichen Halbkugel liegt[2]). Hierzu bemerkt er, daſs der gröſste Kreisbogen cd die kürzeste Entfernung[3]) zwischen den beiden Punkten darstellt.

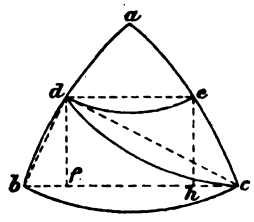


Fig. 34.

1). In Trapezunt geboren ging Amirucio, als sein Vaterland 1461 unter türkische Herrschaft kam, zum Islam über und bekleidete in Konstantinopel eine angesehene Stellung. Doppelmayr a. a. O. p. 33. Note (y). Seine Abhandlung über die zur Geographie notwendigen Vorkenntnisse kam nach Wien, wo sie Stabius, ein Freund Werner's, zu Gesicht bekam, der sie diesem zur Übersetzung empfahl. Cantor II. 416 und Werner a. a. O. Brief an den Kardinal Mathäus Gurk. In neuerer Zeit machte S. Günther zuerst auf sie aufmerksam. Studien zur Geschichte der mathem. und physik. Geographie. Heft V. p. 306—308. — 2) a. a. O. Problema primum. Prop. VII. — 3) Einen Beweis

Aus den in den folgenden Anmerkungen entwickelten Sätzen und Aufgaben erwähnen wir noch die letzte: „Aus der kürzesten Entfernung zweier Orte, deren Breiten gegeben sind, die Längendifferenz zu finden", die mit der Berechnung eines Winkels aus den drei Seiten identisch ist. Die Auflösung, welche Werner mitteilt, stimmt genau mit jener ersten Regiomontan's überein (S. 129), nur benützt er statt des Sinus die Sehne[1]); überhaupt kommt nirgends der Sinus zur Anwendung, wohl um den nur mit Ptolemäus bekannten Lesern die Lektüre zu erleichtern. Es ist nun sehr wahrscheinlich, dafs Werner durch Willibald Pirkheimer Einblick in Regiomontan's Dreiecksbücher erhalten und jene Lösung daraus entnommen hat, da der Nürnberger Patrizier seine reichhaltige Sammlung an Handschriften seinen Freunden in der liberalsten Weise zur Verfügung stellte. Allerdings teilt uns Werner hiervon nichts mit, obwohl er in dem angezogenen Briefe an den Kardinal Gurk das Schicksal der Schriften seines grofsen Vorgängers in jener Weise schildert, wie wir es früher angeführt haben. Aber wir kennen die Sorglosigkeit jener Zeit in der Wahrung des geistigen Eigentumes zur Genüge, um mit Recht zu vermuten, dafs in Werner's Bücher über die Dreiecke nicht nur die Lösung dieser einen Aufgabe aus Regiomontan's Werk übergegangen sein dürfte. Jedoch war Werner ein so selbständiger Kopf, dafs er ohne Zweifel auch das Überkommene originell verarbeitete. Dafür spricht z.B. die Umgestaltung von Regiomontan's Cosinussatz durch Erfindung der sogenannten prosthaphäretischen Methode, die bisher einer viel späteren Zeit zugeschrieben wurde, während sie Werner's Eigentum ist[2]). Das eigentümliche Wort ist gebildet aus *πρόσθεσις* und *ἀφαίρεσις*, Hinzufügung und Wegnahme, und bedeutet eine Additions- und Subtraktionsmethode, welche später so ausgebildet wurde, dafs

---

hierfür, der natürlich mit elementaren Mitteln nicht exakt ausfallen konnte, hatte Werner schon in seinen „in librum geographiae Cl. Ptolemaei argumenta paraphrases et adnotationes", Admonitio IV zu erbringen gesucht.

1) An dieser Stelle verweist er auf das 3. Buch seiner Dreieckslehre, wo er das Problem „per verissima mathematicae artis principia et assumpta" an Figuren gelöst habe und verspricht, dafs er bald eine Reihe von Problemen veröffentlichen werde, welche mit den daselbst niedergelegten Lehren sich rasch und beinahe mühelos lösen lassen. Auch dieses „liber de multimodis tam in Astronomia quam in Geographia problematis quae ope arteque horum quinque librorum absolvuntur", wie die Schrift in einem unserm Bande vorgedruckten kaiserl. Privilegium genannt wird, scheint wohl abgefafst worden zu sein, hat sich aber nicht erhalten. — 2) Vgl. genaueres hierüber in meinem Aufsatz: Beitrag zur Geschichte der prosthaphäretischen Methode. Bibliotheca mathem. 1896. 105—108.

sie bis zur Erfindung der Logarithmen sehr wohl dazu dienen konnte, die Multiplikation grofser Zahlen durch Addition zu ersetzen. Wir können sie kurz durch die beiden Formeln:

$$\sin\alpha \sin\beta = \tfrac{1}{2}\{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\},$$
$$\cos\alpha \cos\beta = \tfrac{1}{2}\{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\}$$

charakterisieren.

Schon bei Ibn Jûnos fanden wir (S. 63) eine Anwendung der zweiten dieser Formeln und zweifeln nicht, dafs sie die Araber auf verschiedene Fälle anzuwenden wufsten, obwohl es uns nicht möglich ist, einen direkten Beweis für diese Ansicht zu erbringen. Keinesfalls hat aber Werner von ihnen die Kenntnis der Methode überkommen, da sie sich in den damals bekannten arabischen Schriften nirgends findet. Somit müssen wir ihn wohl als selbständigen Erfinder der nachmals im Abendlande so viel gebrauchten Methode ansehen, wenn es uns nachzuweisen gelingt, dafs er sich ihrer schon in seinen fünf Büchern über die Dreiecke bediente. Nun teilt der Heidelberger Professor Jakob Christmann in seiner 1611 erschienenen „Theoria lunae" ausdrücklich mit[1]), dafs er das Manuskript von jenem Werke Werner's kenne, und dafs dieser darin jene Methode entwickelt und an drei Figuren erläutert habe. Zugleich erwähnt er eine Anwendung, die derselbe von seiner Methode gab, um die astronomische Länge der Spica virginis aus Ekliptikschiefe, Deklination und Breite bequem zu berechnen. Hiernach dürfte wohl kein Zweifel an der Richtigkeit unserer Behauptung[2]) bestehen, dafs Werner thatsächlich im dritten Buche seiner Dreieckslehre diese Methode wenigstens insoweit gelehrt hat, als er zeigte, wie das Produkt zweier Sinusse durch eine Summe ersetzt werden

1) A. a. O. p. 124: „Usus etiam est peculiari prosthaphaeresi, cujus demonstrationem attulit in proprio opere de Triangulis scripto, in quo etiam tres casus Prosthaphaeresium per tres distinctas figuras explicavit et nonnullis transcriptoribus occasionem praebuit, ut cum opus hoc, lucem nondum viderit, sed manuscriptum dumtaxat apud nos extet, inventionem Prosthaphaereseon sibi vendicaverint eamque multis partibus amplificârint." Dafs Christmann das Werk Werner's in Händen hatte, erhellt auch daraus, dafs es, wie erwähnt, an Rhaeticus kam, dessen ganzer Nachlafs mit seinem Tode an Otho und von diesem an Christmann überging. Cantor II. 555. — 2) Wir haben unserer früher angeführten Abhandlung diesen Hauptbeweis entnommen, da alle anderen Historiker der Angabe Longomontan's (Astronomia Danica 1622. p. 10) sich anschliefsend die Erfindung der Prosthaphäresis dem Paul Wittich, einem zeitweiligen Mitarbeiter Tycho Brahe's, zuschreiben. Übrigens fanden wir inzwischen noch einen weiteren Beweis im Cod. lat. monac. 24101, der von Johann Prätorius um 1599 herstammt. Daselbst führt der Verfasser als Regel zur Berechnung einer Seite a aus den Seiten b und c und dem ein-

könne. Ob er auch schon den Gedanken hatte, mit diesen Formeln die Multiplikation irgendwelcher Zahlen durch Addition zu ersetzen, ein Gedanke, der die Methode erst befähigte, einen Ersatz für die noch fehlenden Logarithmen zu bilden, läfst sich aus Christmann's Angaben natürlich nicht entnehmen.

In den nächsten drei Jahrzehnten nach Werner scheint die Kenntnis der Trigonometrie in keiner besonderen Weise Fortschritte gemacht zu haben, man reichte eben mit dem Vorhandenen zur Lösung der aktuellen astronomischen und kosmographischen Fragen aus, und Regiomontan's Schätze ruhten, mit Ausnahme der Tabula primi mobilis, die seit 1514 bekannt war, noch immer für die Allgemeinheit unbenützbar in der Hand Einzelner. Auch von seinen Sinustabellen hatte man nur erst die einfachste, die den Tabulae directionum beigegeben war, während die beiden gröfseren, wie wir wissen, erst 1541 erschienen. Man suchte daher zunächst diese fühlbare Lücke zu ergänzen.

Das liefs sich besonders Peter Apian (Bienewitz oder Bennewitz)[1]) angelegen sein, der von 1495—1552 lebte und seit 1527 an der Universität Ingolstadt Mathematik und Astronomie lehrte. Er genofs eines grofsen Rufes und kam hauptsächlich dadurch, dafs Kaiser Karl V. sein Schüler war, zu Adel und Reichtum. Seine Studien, die sich vornehmlich auf Astronomie und die von Werner wieder zu neuem Leben erweckte Kosmographie erstreckten, zeitigten auch in unserer Wissenschaft einige Früchte. So hatte er in seiner „Introductio geographica in doctissimas Verneri adnotationes" 1533 eine 9 Seiten umfassende Sinustabelle drucken lassen, durch welche man für den Radius 10^5 die Sinusse der Winkel des ersten Quadranten von Minute zu Minute finden konnte[2]). Sein Hauptaugenmerk aber

---

geschlossenen Winkel α des sphärischen Dreieckes den durch die Gleichung wiederzugebenden Satz:

$\cos a = \frac{1}{2}\{\sin(90°-b+c) - \sin(90°-b-c)\}\,\text{sinvers}(180°-\alpha) + \sin(90°-b-c)$

an und bezeichnet Werner als seinen Erfinder (folio 18), nur habe ihn ein gewisser Schuler in diese etwas einfachere Gestalt gebracht.

1) Über ihn vergleiche die Schrift von S. Günther: „Peter und Philipp Apian", Abhandlungen der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, VI. Folge. 11. Band. 1882. — 2) Dieselbe erschien also 8 Jahre vor Veröffentlichung der dritten Tabelle Regiomontan's, die für $r = 10^7$ berechnet war. Es besteht jedoch für uns kein Zweifel, dafs Apian seine Tafel aus der letzteren abgeleitet hat und zwar aus demselben Manuskripte, nach welchem sie Schöner 1541 herausgab; denn die Anleitung, die er zur Berechnung seiner Tafel gibt, stimmt genau mit jener überein, die dort als von Peurbach herstammend bezeichnet wird, und die wir bei Al-Zarkáli kennen lernten. Es dürfte daher wohl kein Zweifel bestehen, dafs die folgenden Worte, die Schöner in der

war darauf gerichtet, sein angeborenes mechanisches Talent zur Konstruktion von Scheiben- und anderen Instrumenten zu verwenden, welche alle Tafeln und Rechnungen ersparen sollten. Kepler hat dieses Bestreben, das sich in dem grofsen, Kaiser Karl V. gewidmeten Werke „Astronomicum Caesareum", Ingolst. 1540 zur vollsten Blüte entfaltete, nachmals mit Recht eine „industria miserabilis" genannt. Der noch relativ brauchbarste dieser Apparate war sein „Instrumentum primi mobilis", das er 1534 bekannt machte und an dessen Beschreibung er die uns schon bekannte Übersetzung der 9 Bücher Geber's, sowie jene Sinustafel anhängte.

Dieses Instrument diente zur Auffindung des Sinus und des Sinus versus eines spitzen Winkels und war folgendermafsen konstruiert. In Fig. 35 ist $\sphericalangle BAC = 90^0$, und die Gradteilung auf Bogen BC aufgetragen. Errichtet man dann über AB und AC als Durchmesser Kreise, die die Namen semicirculus versus und rectus führen, teilt BA von B aus und AC von A aus in je n gleiche Teile (Apian schlägt 100000 vor) und legt durch jeden Teilpunkt von A als Mittelpunkt aus einen Kreis, so schneiden diese Kreise auf den über AB und AC stehenden ebenfalls eine Teilung in je n Teile aus, die man aufträgt. Nun ist in A ein Faden befestigt, der nach jenem Winkelgrade gespannt werden kann, dessen Sinus oder Sinus versus man ablesen will. Ist dieser Winkel $\sphericalangle BAG = \alpha$, und schneidet der gespannte Faden den semicirculus versus in H, den anderen in K, so verfolgt man die durch H und K gehenden Kreise bis zu ihren Schnittpunkten in I und L mit BA, resp. AC. Wird nun $BI = p$ Teile abgelesen, so stellt p direkt den sinvers α dar, denn es ist $BI = n - n\cos\alpha = n$ sinvers α, da ja $\cos\alpha = \frac{AH}{n} = \frac{AI}{n}$ ist. Liest man ferner auf AC, $AL = q$ Teile ab, so sind diese direkt gleich $\sin\alpha$, denn $\frac{AK}{n} = \frac{AL}{n} = \cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$.

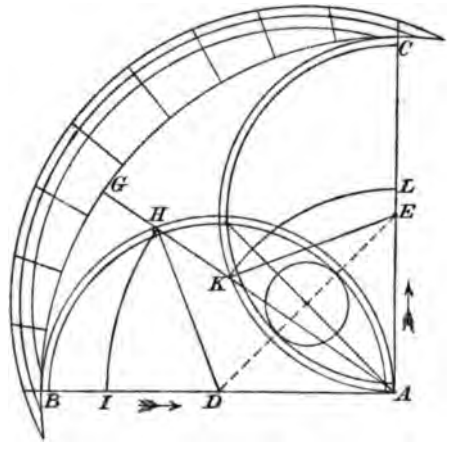


Fig. 35.

Zueignung seiner Ausgabe spricht, auf Apian gemünzt waren: „Admiratione dignum est, fuisse quosdam qui hujus doctissimi viri labores, tamquam ingenii sui foeturas, sui nominis inscriptione, suppresso interim nomine Regiomontani publicare non erubuerint, secus facientes, quam facere decet bonos viros."

Apian hatte ein eigenes Talent, seinen Apparaten Gestalten zu geben, in denen sie den Wappenbildern grofser Herren ähnelten; so widmete er den vorliegenden, da er die Gestalt eines Fuchseisens habe, dem Freiherrn Christoph Stadion, Bischof von Augsburg, der in seinem Wappen ein solches trug und Apian's Gönner war. Durch solche Mittel wurde das Interesse, das seine Instrumente bei seinen Zeitgenossen über Gebühr erweckten, noch erhöht, und es fehlte daher bald auch nicht an Nachahmern und Plagiatoren. So veröffentlichte z. B. bereits 1542 Orontius Finaeus, Professor der Mathematik in Paris, eine Kosmographie, in welcher er genau dasselbe Sinusinstrument als seine eigene Erfindung ausgab.

Apian's Kenntnisse in der Trigonometrie zeigen Regiomontan gegenüber keinerlei Fortschritt; er benützt durchweg nur den Sinus, den Cosinus, für den er wohl zuerst eine eigene Bezeichnung „Sinus rectus secundus" einführt[1]), und den Sinus versus — Regiomontan's längst bekannte Tabula foecunda trigonometrisch zu verwerten kam ihm nicht in den Sinn. Ebensowenig zeigen die Vorschriften, die er in der 2. Auflage des genannten Werkes 1541 zur Auflösung von 100 sphärisch-astronomischen Aufgaben gibt, etwas bemerkenswert Neues. Dagegen ist es ihm als hohes Verdienst anzurechnen, dafs er Dschâbir's Schrift durch seine Druckausgabe in weiteren Kreisen bekannt machte.

§ 3. Nikolaus Coppernicus.

Eine ganz andere Stellung in der Geschichte der Trigonometrie, als jene Nachfolger Regiomontan's, nimmt der grofse Coppernicus ein, der, wenn auch nicht völlig unabhängig von seinem berühmten Vorgänger, doch in der Hauptsache selbständig sich die trigonometrischen Grundlagen für den Bau seines neuen Weltsystems schuf. Wir müssen daher bei ihm etwas länger verweilen, zumal seine Gedanken sehr bald die fruchtbarste Verwertung fanden und Regiomontan's System in wesentlichen Punkten zu ergänzen halfen.

Nikolaus Coppernicus oder Koppernigk[2]) ist geboren am 19. Februar 1473 zu Thorn, studierte von 1491—94 in Krakau und hielt sich von 1496—1506 in Italien auf, wo er in Bologna und Padua studierte, Rom besuchte und in Ferrara den juristischen Doktorgrad errang. Nach Deutschland zurückgekehrt lebte er als Domherr in Frauenburg und war neben seinen verschiedenartigen Berufs-

1) In der oben angeführten Kosmographie, Defin. 9, sowie im Instrumentum primi mobilis. — 2) Nic. Coppernicus von Leopold Prowe. 2 Bände. Berlin 1883—84.

geschäften seit 1519 mit Ausarbeitung seines neuen Weltsystemes beschäftigt. Um das Jahr 1530 verfafste er eine Anzeige[1]) dieses seines Werkes, das damals in den Grundzügen bereits fertig war, und sandte sie an verschiedene befreundete Gelehrte. Der von uns schon genannte Georg Joachim Rhaeticus, welcher seit 1537 Professor der Mathematik in Wittenberg war, kam von Coppernicus' Ruf angezogen im Frühjahr 1539 zu ihm nach Frauenburg, um sich in die Geheimnisse des neuen Systems einführen zu lassen, und veröffentlichte bald eine Schrift, in welcher er die Welt mit den Hauptpunkten desselben bekannt machte. Diese „Narratio prima de libris revolutionibus" erschien noch in demselben Jahre seiner Ankunft in Frauenburg.

Rhaeticus, der in enger Freundschaft zu Coppernicus stand, vermochte übrigens den grofsen Meister trotz aller Bemühungen doch nicht zu bewegen, sein vollständig fertiges Lebenswerk der Öffentlichkeit zu übergeben. Dies gelang erst seinem Jugendfreunde Tidemann Giese, dem gelehrten Bischof von Culm, sowie dem Kardinal Nikolaus Schönberg, die seine Bedenken wegen der scheinbaren Widersinnigkeit seiner neuen Lehre zu zerstreuen vermochten, so dafs endlich im Jahre 1541 Rhaeticus mit einer Abschrift des druckfertigen Manuskriptes nach Nürnberg reisen und dasselbe bei den ihm bekannten Brüdern Alantsee in Druck geben konnte. Rhaeticus überwachte selbst den Druck der ersten Bogen, ging dann aber zur abermaligen Übernahme seiner Professur nach Wittenberg zurück, während Osiander und Schöner die völlige Herausgabe des Werkes besorgten, das 1543 erschien, gerade noch vor dem am 24. Mai desselben Jahres erfolgten Tode des grofsen Meisters.

Das Werk, welches den Titel „De revolutionibus orbium coelestium"[2]) erhielt, enthält in den Kapiteln 12, 13 und 14 des ersten Buches eine Entwickelung der für die folgenden astronomischen Untersuchungen notwendigen trigonometrischen Hilfsmittel.

Zwei dieser Kapitel, das 13. und 14. hatte Rhaeticus schon 1542 als selbständige Schrift unter dem Titel herausgegeben: „De lateribus et angulis triangulorum, tum planorum rectilineorum, tum sphaericorum, libellus eruditissimus et utilissimus . . . scriptus a Clarissimo et doctissimo D. Nicolao Copernico Toronensi. Additus est Canon semissium subtensarum rectarum linearum in Circulo. Vittembergae". Anno 1542 in 4°. Dieser libellus unterscheidet sich

1) Diese Selbstanzeige wurde erst 1878 wieder entdeckt und nach einer Wiener Handschrift veröffentlicht. — 2) Die beste Ausgabe ist die Jubiläumsausgabe, Thorn 1873. Deutsch von Menzzer. Thorn 1879.

nur in dem angehängten Kanon von der Niederschrift des Coppernicus. Sowohl der letztere, als auch Rhaeticus bedienen sich nirgends des Wortes Sinus, sondern sprechen nur von halben Sehnen. Die Sinustafel in des Coppernicus' Werk[1]) ist für den Radius 10^5 berechnet und schreitet von 10′ zu 10′ fort, wobei die Differenzen zur Berechnung .der Proportionalteile notiert sind. Die Tafel des Rhaeticus hingegen, die offenbar von ihm selbst berechnet wurde, bezieht sich auf den Radius 10^7 und schreitet von Minute zu Minute fort; aufserdem ist sie, wie unsere heutigen Tafeln, zur direkten Aufsuchung der Cosinusse eingerichtet, indem am unteren Ende der Spalten die Grade der Komplemente der Winkel notiert sind und die Minuten rechter Hand angegeben werden[2]). Da diese Angabe der Komplementswinkel sich in dem Kanon des Coppernicus nicht findet, so dürfte sie wohl von Rhaeticus selbst herrühren.

Das 13. Kapitel der Revolutionen umfafst die ebene Trigonometrie, die nichts Bemerkenswertes bietet, indem die Fundamentalaufgaben über die Dreiecke sämtlich mit der Zerspaltung in zwei rechtwinklige nach der Methode der Griechen gelöst werden; nur wird überall die halbe Sehne statt der ganzen gebraucht[3]). Sollte in der auffälligen Vermeidung des Wortes Sinus vielleicht ein Zusammenhang mit Werner zu sehen sein, dessen Dreiecksbücher, wie wir wissen, Rhaeticus in Händen hatte?

Im 14. Kapitel behandelt Coppernicus die sphärische Trigonometrie, an deren Spitze er den Sinussatz des rechtwinkeligen Dreieckes oder die Regel der vier Gröfsen stellt, die er beide nicht streng voneinander scheidet. Woher kennt der Meister diese Sätze? Vielleicht aus einer mündlichen Mitteilung des Rhaeticus, der sie selbst wieder von Werner hatte? Im Nachlasse des Coppernicus fand sich auch ein Exemplar von jener uns wohlbekannten Ausgabe der 9 Bücher Gebers, die 1534 erschienen waren, sowie ein solches der Dreiecksbücher Regiomontan's[4]) mit einer eigenhändigen Widmung des Rhaeticus, die aber leider nicht datiert ist, so dafs

1) Deutsche Ausgabe 38—42 incl. — 2) Schon Gassendi (vita Copernici p. 30), Kaestner (Geschichte der Mathematik I. 577) und später R. Wolf H. A. I. 171 haben darauf aufmerksam gemacht, dafs dies die erste Tafel ist, in der die Cosinusse direkt neben den Sinussen auftreten, wenn sie auch keinen eigenen Namen führen. — 3) Coppernicus sagt am Schlusse des 12. Kap. p. 37 der deutschen Ausgabe: „Ich halte es aber für hinreichend, wenn wir nur die halben Sehnen der doppelten Bogen in das Verzeichnis aufnehmen, durch welche Abkürzung wir dasjenige in Quadranten zusammenfassen, was für den Halbkreis ausgeführt werden müfste." — 4) Prowe a. a. O. I. 408. Coppernicus hat diese Bücher eingehend studiert, wie eine Reihe von Randbemerkungen von seiner Hand in denselben zeigen.

man nicht entscheiden kann, wann dieser die Schrift dem Coppernicus geschenkt hat. Stammt vielleicht aus einem dieser Werke seine Kenntnis des Sinussatzes? Dann müfste aber die erste Niederschrift seiner Trigonometrie völlig umgearbeitet worden sein, da dieselbe nach einer Angabe[1]) des Rhaeticus in seiner Widmung des libellus triangulorum lange vor dem Erscheinen von Regiomontan's Büchern bereits vollendet war[2]). Dies anzunehmen haben wir aber keinen Anhaltspunkt. Im Gegenteil bemerkt M. Curtze p. 57 der Jubiläumsausgabe der Revolutionen, dafs gerade die ersten Sätze von Coppernicus' Trigonometrie, wie die Originalhandschrift zeigt, nicht umgearbeitet worden sind, soviel er auch an den anderen Sätzen umgestellt und verändert hat. Es scheint uns daher das Wahrscheinlichste, dafs Coppernicus durch eigenes Studium der Ptolemäischen Trigonometrie auf diese Vereinfachung geführt wurde. Und zwar sprechen dafür folgende Thatsachen: Wie Ptolemäus den Satz des Menelaus auf das vollständige Viereck anwendet, um in jedem einzelnen Falle die Lösung einer Dreiecksaufgabe zu erhalten, ganz ebenso wendet Coppernicus seinen Sinussatz auf das vollständige Viereck an und gewinnt dadurch die Lösungen der Hauptaufgaben der Dreieckslehre, während im Gegensatze hierzu Geber und Regiomontan sich mittelst dieses fundamentalen Satzes zuerst die speziellen Relationen für das rechtwinklige Dreieck verschaffen, um diese dann zur Behandlung der einzelnen Probleme zu benützen. Für unsere Ansicht spricht aber auch der Beweis des Sinussatzes, der im Gegensatze zu Geber's und Regiomontan's Verfahren, wie der Transversalensatz der Griechen, direkt aus der Betrachtung des zugehörigen Dreikantes gewonnen wird. Die Eleganz und Einfachheit desselben veranlafst uns, ihn hier mitzuteilen.

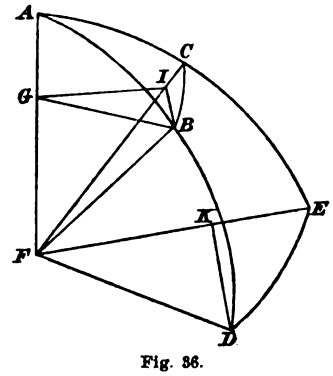


Fig. 36.

Ist $\triangle ABC$ in Fig. 36 bei C rechtwinkelig, so ergänzt man arc. AC und arc. AB zu Quadranten und konstruiert die Dreikante $ABCF$ und $AEDF$, deren Spitzen im Kugelmittelpunkt F liegen. Fällt man dann $BG \perp AF$, $BI \perp FC$ und $DK \perp EF$ und zieht GI, so sind die Ebenen DEF

1) Berti (Copernico e le vicende del Sistema Copernicano Roma 1876) hat p. 46—48 des Rhaeticus Zeugnis in Zweifel gezogen, aber ganz mit Unrecht, wie Prowe unwiderleglich nachweist. — 2) Nunc recens prodiit lucubratio Regiomontani, sed multo antequam videre potuit vir Clarissimus et

und BCF senkrecht zur Ebene AEF; somit ist $DK \parallel BI$ und $\sphericalangle FDK = \sphericalangle GBI$, d. h. $\triangle FKD \sim \triangle GIB$. Hieraus folgt $DF:BG = DK:BI$, oder da $BI = \sin BC$, $BG = \sin AB$, $DK = \sin A$, $DF = r$ ist, $r : \sin AB = \sin A : \sin BC$. q. e. d.

Hat Coppernicus auch den Sinussatz selbständig gefunden, so zeigt[1]) die noch erhaltene Originalhandschrift seines Werkes, dafs er die Lösung der beiden Aufgaben, ein Dreieck aus den drei Seiten beziehungsweise aus den drei Winkeln zu berechnen, erst nach Einsicht von Regiomontan's Büchern in seine Schrift eingefügt hat, aber die Lösungen sind auch hier selbständig umgestaltet und einfacher und eleganter als bei Regiomontan ausgeführt[2]).

Ursprünglich sollten die Kapitel über die Dreiecke ein selbständiges, das zweite Buch der Revolutionen ausmachen[3]), später aber wurden sie unter verschiedenen Kürzungen zum ersten Buche geschlagen, wodurch sie den Charakter eines selbständigen Lehrbuches der Trigonometrie verloren, das Coppernicus nach dem Erscheinen von Regiomontan's Werk wohl nicht mehr für notwendig hielt. Es ist übrigens wichtig zu bemerken, dafs er mit der hier entwickelten Dreieckslehre doch nicht in allen Fällen, die sich bei seinen astronomischen Untersuchungen darboten, ausreichte, sei es dafs er sie nicht überall genügend zu benützen verstand, sei es dafs er auf anderem Wege rascher zum Ziele zu gelangen glaubte. So findet sich z. B. im II. Buche Kap. 3[4]) seines Werkes die nämliche Aufgabe, die Werner schon mit seiner prosthaphäretischen Methode gelöst hatte (S. 136), nämlich aus Breite, Deklination und Ekliptikschiefe die Länge eines Sternes zu bestimmen, mit der uns wohlbekannten Projektionsmethode des Analemmas behandelt. Jedoch steht seine Endformel jener Werner's an Eleganz nach.

Wie Coppernicus in seinen Beweisen und Ableitungen durchweg ein gewisses Streben nach Selbständigkeit zeigt, so gibt sich die Fülle seiner eigenen Gedanken auch in den Randglossen zu erkennen, mit denen er die in seinem Besitze befindlichen wissenschaftlichen Werke zu versehen pflegte. In seinem Nachlasse[5]) befindet sich nun auch ein Exemplar von Regiomontan's „Tabulae directionum“ in jener

---

doctissimus Nic. Copp., dum et in Ptolemaeo illustrando, et in doctrina motuum tradenda elaborat, de Triangulis eruditissime scripsit.

1) Prowe a. a. O. I. Abschn. 2. 478—479, Note ** und 485—487, Note *. Vgl. auch Cantor II. 433. — 2) Das bemerkte schon Battaglini; vgl. Berti a. a. O. 240. — 3) Jubiläumsausgabe p. 34, Note. — 4) Deutsche Ausgabe 133—134. — 5) Max. Curtze, Reliquiae Coppernicanae. Zeitschr. f. Math. u. Phys. XIX. 76—82 und 432—458, sowie XX. 221—248. Über die Sekanten speziell XX. 221—222.

von 1490 aus der Offizin von Erhardt Radoldt in Augsburg stammenden Ausgabe[1]). In der darin enthaltenen Tabula foecunda, die für $r = 100000$ berechnet war, hat Coppernicus eine neue Kolumne von Zahlen für $r = 10000$ hinzu berechnet, der er die Überschrift Ὑποτεινουσα gab[2]), während er die Zahlen Regiomontan's mit Καθετος bezeichnete. Damit aber war die erste Sekantentafel hergestellt, indem die letzteren Zahlen in Fig. 37 die Länge BC, die ersteren die Länge AC darstellend die Tangenten, beziehungsweise Sekanten bezeichnen.

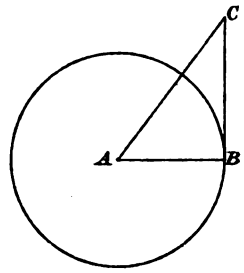


Fig. 37.

Geführt wurde er auf die Sekanten jedenfalls durch das Bestreben, die lästigen Divisionen durch den Cosinus eines Winkels durch Multiplikationen zu ersetzen, was die Sekanten leisteten, und darin allein bestand auch ihr Wert, den sie bis zur Erfindung der Logarithmen behielten[3]).

Praktische Anwendungen von dieser hier zum erstenmale auftretenden neuen Funktion sind uns allerdings von Coppernicus nicht überliefert, auch wurde sie Zeit seines Lebens nicht bekannt, da er nichts hierüber veröffentlichte; doch begegnen wir ihr wieder bei seinem Schüler Rhaeticus, zu dem wir uns jetzt wenden.

§ 4. Georg Joachim Rhaeticus.

Der eigentliche Familienname dieses Gelehrten ist nicht endgiltig festgestellt, einige nennen ihn Joachim, andere von Lauchen[4]), er selbst schrieb sich Georg Joachim Rhaeticus und war 1514 zu Feldkirch in Vorarlberg (Rhätien) geboren. Er studierte zuerst

1) L. Prowe I. Abschn. 2. 418. — 2) Diese Tabelle hat Curtze a. a. O. XX. 221 abgedruckt. — 3) Schon bei Regiomontan findet sich eine Spur von den Sekanten, indem er nämlich zur Erleichterung der Berechnung der Zeiten einiger seiner Beobachtungen von den Jahren 1460—62 das Verhältnis des Cosinus der geographischen Breite φ zum Sinustotus 600000 in $100000 : \frac{600000}{\cos\varphi} \cdot 10^5$ verwandelte. Das Glied $\frac{600000}{\cos\varphi} \cdot 10^5$ nannte er „multiplicator perpetuus ad locum observationis", und hierin ist eben $\frac{600000}{\cos\varphi} = \sec\varphi$. (Scripta clarissimi Math. M. Joannis Regiomontani de Torqueto, Astrolabio, Armillari etc. Norimbergae 1544. in 4°. carta 38 und 39.) Hierauf hat Pfleiderer: Ebene Trigonometrie, Tübingen 1802. 8°. p. 140. Anmerk. b aufmerksam gemacht. — 4) F. Hipler, Chorographie des Joachim Rhaeticus. Zeitschr. f. Math. und Phys. XXI. 1876. hist. litt. Abtl. 126.

in Zürich, dann in Wittenberg Mathematik, wo er 1537 seinem Lehrer Johann Volmar nachfolgte, nachdem er sich vorher noch bei dem damals weitberühmten Johann Schöner († 1547) in Nürnberg und bei Johann Stöffler in Tübingen in seiner Wissenschaft gründliche Kenntnisse erworben hatte. Wie schon erwähnt, verliefs er 1539, bald nach seiner Ernennung zum Professor für Arithmetik und Geometrie, Wittenberg und ging zu Coppernicus, bei dem er bis 1542 blieb, dann kehrte er nach Wittenberg zurück, nahm aber noch in demselben Jahre einen Ruf nach Leipzig an. 1551 zog er nach Prag und von da nach Krakau, wo er bis zu seinem Tode geblieben zu sein scheint, der ihn 1574 zu Kaschau in Ungarn überraschte, als er daselbst einem Gönner einen Besuch abstattete.

Dafs dem Rhaeticus zunächst ein gewisses Verdienst an dem Zustandekommen der Trigonometrie des Coppernicus zukommt, scheint uns aufser Zweifel zu sein. Dafür sprechen mehrere Stellen in der Einleitung zu seinem grofsen Lebenswerke, dem „Opus Palatinum de triangulis", das erst 20 Jahre nach des Rhaeticus Tode von seinem Schüler Valentin Otho vollendet und herausgegeben wurde. So heifst es daselbst z. B. Rhaeticus sei auf den Gedanken gekommen „Ausschnitte von Kugeln und Pyramiden, die über den Kugeldreiecken als Grundflächen stehen, zu benützen", auf welchem Gedanken, wie wir sahen, die meisten Beweise des Coppernicus beruhen. Doch mag man dieser Bemerkung Glauben beimessen oder nicht, soviel ist sicher, dafs sich Rhaeticus von der Zeit seines Aufenthaltes bei Coppernicus ab fast ausschliefslich nur mit trigonometrischen Arbeiten beschäftigte.

In Leipzig machte er sich an die Ausführung eines Planes, den er wahrscheinlich schon in Frauenburg gefafst hatte, indem er nämlich einen Kanon der Sinusse, Tangenten und Sekanten, sowie ihrer Komplementärfunktionen berechnete, dem der Sinus totus $r = 10^7$ zugrunde lag, und der von 10 zu 10 Minuten fortschritt.

Diese Tafel erschien 1551 zu Leipzig bei Wolfgang Gunter unter dem Titel „Canon doctrinae triangulorum. Nunc primum a Georgio Joachimo Rhaetico, in lucem editus". 4^0 und gehört jetzt zu den kaum mehr auffindbaren Seltenheiten[1]). Sie enthält die

1) Die Münchener Hof- und Staatsbibliothek besitzt ein mit Math. P. 168 ausgezeichnetes Exemplar, das uns vorlag. Pfleiderer hat in seiner vorzüglich gearbeiteten Trigonometrie bemerkt, dafs eine solche Schrift wohl existieren müsse, und führt eine Reihe von zeitgenössischen Äufserungen an, die darauf hinweisen, bemerkt aber, dafs sie ihm nicht zu Gesicht gekommen sei, noch habe er in irgend einer Bibliographie darüber Nachricht gefunden. M. Cantor erwähnt das Werk nicht, dagegen zitiert es R. Wolf H. A. I. 171, gibt

erste umfangreichere Tangententafel und die erste überhaupt gedruckte Sekantentafel, so dafs mit der Auffindung dieses Schriftchens im Zusammenhalt mit der schon mitgeteilten handschriftlichen Existenz einer Sekantentabelle bei Coppernicus die Frage[1]) über die Priorität der Erfindung der Sekanten sich endgiltig dahin beantworten läfst, dafs Coppernicus zuerst den Gedanken hatte, diese Funktion einzuführen, und Rhaeticus die Gelehrtenwelt mit ihr bekannt machte. Maurolycus[2]), der uns auch schon begegnete und uns weiter unten noch beschäftigen wird, eignete sich dieselbe sofort an und zeigte ihre praktische Verwendbarkeit.

Die Einrichtung von Rhaeticus' Kanon beruht auf einer neuen Definition der trigonometrischen Funktionen, welche er in einem dem Schriftchen angehängten Dialog andeutete und später im Opus Palatinum eingehend ausführte; wir stellen daher das Folgende nach diesem letzteren Werke dar.

Da er zunächst für die von ihm als notwendig erachteten trigonometrischen Funktionen eine Bezeichnung nötig hatte, und das „barbarische saracenische" Wort Sinus verdrängen wollte, so führte er dafür die Benennung Perpendiculum, für den Cosinus die Bezeichnung Basis und für die Sekante den Namen Hypotenusa ein. So boten ihm die drei Seiten des rechtwinkligen Dreieckes ABC (Fig. 38) — Triquetrum cum recto — seine Grundfunktionen und zwar bezeichnete, wenn AB den Sinus totus vorstellte, BC das Perpendikel und AC die Basis des Winkels α, setzte man aber $AC =$ sin tot., so war AB die Hypotenuse oder Sekante von α, und das Perpendikel BC die Tangente, und wenn endlich $BC =$ sin tot. genommen wurde, so stellte die Basis AC die Cotangente und die Hypotenuse AB die Cosekante des Winkels α vor.

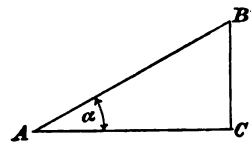


Fig. 38.

Hier also taucht zum erstenmale in der trigonometrischen Litteratur des Abendlandes der Gedanke auf, die Seiten eines rechtwinkeligen Dreieckes zur Definition der 6 Funktionen zu benützen und sie daher in unmittelbare

---

aber unrichtig als Druckort Nürnberg an. Richtig zitiert finde ich es bei Graesse, Trésor des livres rares et précieux 1864. VI, 1. — Dafs Rhaeticus bereits 1539 einen Canon hypotenusarum herausgegeben habe, wie Baltzer (Die Elemente der Mathematik 1878. II. 297 Anm.) sagt, beruht jedenfalls auf einem Irrtum.

1) Vgl. hiermit das ganz ähnliche Urteil M. Curtze's, Zeitschr. f. Math. und Phys. XX. 222. — 2) Delambre hat die Erfindung der Sekanten dem Maurolycus zugeschrieben, a. a. O. 438. Ebenso Chasles, Geschichte der Geometrie 363.

Beziehung zu den Winkeln, statt zu den Kreisbögen zu bringen, wenn auch die praktische Verwendung derselben durch den schwerfälligen Gebrauch des Sinus totus noch wesentlich beeinträchtigt wird. Auch ist zu bemerken, dafs Rhaeticus für die drei Funktionen Tangens, Cotangens und Cosecans keine eigenen Namen einführt. Nach seiner Definition ist für sin tot. $= r$:

$$\operatorname{tg}\alpha : r = \sin\alpha : \cos\alpha; \qquad \operatorname{ctg}\alpha : r = \cos\alpha : \sin\alpha;$$
$$\sec\alpha : r = r : \cos\alpha; \qquad \operatorname{cosec}\alpha : r = r : \sin\alpha.$$

Über die Art und Weise, wie Rhaeticus die Tafel dieser Funktionen berechnet hat, gibt er in seiner ersten Schrift nichts Näheres an, wohl aber sind seine Methoden im Opus Palatinum ausführlich auseinandergesetzt; wir werden daher bei Besprechung dieses Werkes näher auf sie eingehen und wollen jetzt die Einrichtung des Kanons kurz auseinandersetzen. Derselbe umfafst 14 Seiten, wovon immer zwei nebeneinander aufliegende in der Weise zusammengehören, dafs die 6 Funktionswerte, welche einem in der ersten Spalte links stehenden Winkelwerte, beziehungsweise seinem in der letzten Spalte rechts befindlichen Komplemente zugehören, mit ihren Differenzen in je einer beide Seiten durchlaufenden Zeile enthalten sind. Die 6 Funktionswerte sind in 3 Serien zu je zweien geteilt. Über der ersten Serie (die Bezeichnung „Serie" findet sich übrigens erst im Opus Palatinum) steht „Subtendens angulum rectum", d. h. hier stehen „Sinus" und „Cosinus", welche für die Hypotenuse $= 10^7$ erhalten werden; in der zweiten Serie, die „Majus latus includentium angulum rectum" überschrieben ist, sind die für die gröfsere Seite des Dreieckes $= 10^7$ resultierenden Funktionen „Hypotenusa" = Sekante und „Perpendiculum" = Tangente notiert, und in der dritten Serie mit der Überschrift „Minus latus includentium angulum rectum" stehen die aus der Gleichsetzung der kleineren Dreiecksseite mit 10^7 entstehenden Funktionen „Hypotenusa" = Cosekante und „Basis" = Cotangente. Um die Ablesung der Komplementärfunktionen zu ermöglichen, sind am unteren Ende je zweier zusammengehöriger Seiten die entsprechenden Bezeichnungen eingeschrieben, die dann zu den rechtsstehenden Winkelwerten gehören, wie es in unsern heutigen Logarithmentafeln gebräuchlich ist.

Es ist also hier zum erstenmale eine umfassende Tafel aller 6 trigonometrischen Funktionen geschaffen und von dem Satze Gebrauch gemacht, dafs die Funktionen der Winkel über 45^0 gleich den Cofunktionen derselben Winkel unter 45^0 sind, wodurch das Volumen der Tafel auf die Hälfte reduziert wird.

Wir bemerkten schon, dafs der Tafel ein „Dialogus de canone doctrinae triangulorum" angehängt ist. Hierin ist unter anderem

betont, dafs durch Benützung des rechtwinkeligen Dreieckes zur Definition der trigonometrischen Funktionen an Stelle der Kreissehnen ein weit „fruchtbarerer" Kanon erzielt werden könne. Ferner wird mitgeteilt, dafs Rhaeticus die ganze sphärische Dreieckslehre auf 10 Analogien reduziert habe, die sich allein auf das rechtwinkelige Dreieck beziehen, und dafs er aufserdem aus der Betrachtung des zu einem Dreiecke gehörigen Dreikantes die ganze sphärische Trigonometrie abgeleitet habe, wie wir das bei Coppernicus kennen lernten; endlich wird noch versprochen, in einem zweiten Werke eine Reihe von Anwendungen auf Beispiele aus der Optik, Gnomonik, Geographie, Astronomie, Musik (!) und Mechanik zu geben — Versprechungen, die er nicht mehr erfüllen konnte, während seine Regeln über die Dreiecksberechnung im Opus Palatinum ausführlich enthalten sind.

Dieses kleine Schriftchen des Rhaeticus hat, wie sich in der Folge noch zeigen wird, einen nicht zu unterschätzenden Einfluſs auf die Entwickelung der Trigonometrie als eigener selbständiger Wissenschaft ausgeübt, ja man darf sagen, einen gröfseren, als das voluminöse Opus Palatinum mit seinem Riesenkanon, auf das wir an geeigneter Stelle eingehen werden.

§ 5. Erasmus Reinhold's Tangententafel.

An die Veröffentlichung des kleinen Kanons schlofs sich ein weiteres Tafelwerk an, das aus der Feder von Rhaeticus' einstigem Kollegen in Wittenberg, Erasmus Reinhold[1]) (1511 — 1553) stammte. Derselbe besorgte nämlich eine neue Ausgabe der „Tabulae directionum" Regiomontan's, die aber erst ein Jahr nach seinem Tode 1554 erschien[2]). Diese Tafeln enthalten aufser einer Sinustabelle, welche übrigens ganz mit der von Rhaeticus 1542 publizierten übereinstimmt (nur die Differenzen zur Sekundenberechnung sind angegeben), auch eine umfangreiche Tangententafel, tabula foecunda, die für $r = 10^7$ von Minute zu Minute berechnet ist. Für den letzten Grad sind die Tangenten sogar von 10 zu 10 Sekunden bestimmt, was jedoch nicht hindert, dafs sämtliche Werte, schon von 70^0 angefangen, in den letzten Dezimalen ungenau sind. Doch wichtiger ist zu bemerken, dafs Reinhold den Nutzen der Tangenten nicht, wie seinerzeit Regiomontan, nur in der leichteren Berechnung

1) Reinhold war gleichzeitig mit Rhaeticus auf Veranlassung Melanchthon's an die Wittenberger Hochschule gekommen und hatte die höhere Mathematik, d. h. die Astronomie übernommen. — 2) Liber tabularum directionum discentibus prima elementa astronomiae utilissima. Tubingae 1554. in 4°. Die Widmung an Herzog Albrecht von Preufsen ist von 1553.

der Rektaszension und der Verwendung beim Jakobstab sieht, sondern er kennt auch ihren rein trigonometrischen Wert und stellt sie gleich nach den Sinussen[1]). Offenbar hatte er hierin schon von Rhaeticus gelernt, denn auch seine Definition der Tangenten, sowie der Cotangenten, welche ebenfalls direkt abgelesen werden können, ist dieselbe, wie bei jenem, eine eigene Bezeichnung für sie findet sich aber auch hier noch nicht.

Wir haben im Vorhergehenden gesehen, wie die Trigonometrie ihre neueren und bedeutenderen Fortschritte: die gleichzeitige Betrachtung der 6 Funktionen, sowie die Erstellung neuer brauchbarer Tafelwerke wieder der Anregung durch die Astronomie verdankte. Diese hatte aber auch in den letzten Jahrzehnten an den deutschen Universitäten immer mehr an Boden gewonnen und die Astrologie allmählich etwas zurückdrängend sich ernsteren Problemen gewidmet. Das beweisen namentlich die vielen Lehrbücher, welche damals erschienen und astronomische wie kosmographische Fragen behandelten. Natürlich haben wir auf diese Litteratur[2]), insofern sie keinen wissenschaftlichen Fortschritt bringt, nicht weiter einzugehen und wollen nur erwähnen, dafs auch bei Behandlung der geographischen Probleme namentlich in den Schriften Caspar Peucer's[3]), der Schwiegersohn von Melanchthon und Nachfolger Reinhold's auf der Lehrkanzel in Wittenberg war, bereits die schwerfälligen Methoden Werner's verschwinden und durch praktische trigonometrische ersetzt werden.

§ 6. Die Trigonometrie in Italien.

Um die zeitliche Aufeinanderfolge festzuhalten, wenden wir uns jetzt nach Italien, wo wir alsbald den Einfluſs der Arbeiten des Coppernicus und Rhaeticus erkennen werden. Die Astronomie und mit ihr unsere Wissenschaft hatten damals schon einen wesentlich internationalen Charakter angenommen, wie die ungemein rasche Verbreitung der fundamentalen Schriften Regiomontan's und Coppernicus' über alle zivilisierten Länder beweist. Der Grund hierfür lag aufser in dem steigenden wissenschaftlichen Interesse auch in den

---

1) ... inter quos (canones) praecipuus est Foecundus, cui merito secundus tribuimus, cum tabulae sinuum primae debeantur. — 2) Einige der vielgelesensten Autoren waren aufser Peucer, Thomas Blebelius aus Wittenberg, Johann Stöffler aus Tübingen, Daniel Santbech, Oswald Schreckenfuchs aus Freiburg, Johann Schöner aus Nürnberg u. a. m. — 2) C. Peucer, De dimensione terrae et geometrice numerandis locorum particularium intervallis ex doctrina triangulorum sphaericorum et canone subtensarum liber. Wittembergae 1587. Die Widmung an Joachim Camerarius ist von 1554.

vielfachen persönlichen Beziehungen, in die die Gelehrten jener Zeit auf italienischem Boden zu einander traten, der noch immer den Sammelplatz der wifsbegierigen Männer und Jünglinge aus aller Herren Länder bildete. Die hier in der Studienzeit angeknüpften Bekanntschaften gaben dann später zu lebhaftem Briefwechsel Veranlassung, durch den sich die Gelehrten teils mit ihren Entdeckungen gegenseitig bekannt machten, teils sich wissenschaftliche Fragen und Probleme stellten, die oftmals wieder die Entstehung von Druckschriften und Werken veranlassten, welche man sich wechselseitig zusandte.

Zunächst tritt uns in Italien Francesco Maurolyco[1]) entgegen, der von 1494—1575 lebte und Abt in Messina war — eine Persönlichkeit, die wir schon wiederholt anzuführen hatten. Obwohl er allerdings räumlich den Zentren italienischer Bildung sehr ferne war, so stand er dennoch mit den bedeutendsten Männern seines Vaterlandes in Beziehung, so dafs seine Stellung keineswegs als eine isolierte zu betrachten ist. Er hatte sich Regiomontan's Lieblingsgedanken angeeignet, die auf Mathematik und Astronomie bezüglichen Schriften der Alten, namentlich der Griechen, denen er entstammte, in lateinischen Übersetzungen zu veröffentlichen, und es ist sehr zu bedauern, dafs von seinen die gröfste Sachkenntnis verratenden Arbeiten nur wenige im Druck erschienen sind, und auch handschriftlich nicht mehr viel erhalten ist. Dennoch geben eine Sphärik[2]) sowie ein von F. Napoli 1876 veröffentlichter handschriftlicher Traktat[3]) über Geometrie ein ganz gutes Bild von den Leistungen, die er in unserer Wissenschaft aufzuweisen hatte.

Jene beiden 1558 erschienenen Bücher über die Sphärik können als eine Erweiterung und Ergänzung der von ihm übersetzten und herausgegebenen Kugellehre des Menelaus gelten, die wir schon kennen lernten. Regiomontan's Kenntnisse, die er vollständig in sich aufgenommen hatte, verwertete er hier überall, aber fast immer in durchaus origineller Weise; ebenso war er mit Geber's astronomischen Büchern völlig vertraut, sei es durch Apian's Veröffentlichung, sei es dafs er ein handschriftliches Exemplar der Übersetzung Gerhard's von Cremona erhalten hatte.

Wie Apian bezeichnete er den Cosinus eines Winkels mit „sinus rectus secundus“ und im Gegensatze hierzu den Sinus mit

---

1) Vgl. über denselben: F. Napoli, Alla vita ed ai lavori di Fr. Maurolyco. Bulletino di Boncompagni IX. 1876. 1—122. — 2) Vgl. Anmerkung 5 auf Seite 14. Seine eigene Sphärik ist jener des Menelaus angehängt. — 3) Napoli a. a. O. 50—84.

„sinus rectus primus“ und behielt diese Bezeichnung in der Schreibweise „sinus 2^m arcus α“, resp. „sinus 1^m arcus α“ konsquent bei; aufserdem bediente er sich auch noch der Bezeichnung „sinus versus major“ für sinvers $(180^0 - \alpha)$, die jedoch wenig Anklang fand, während die Bezeichnung für den Cosinus in Italien lange beibehalten und im folgenden Jahrhundert von Cavalieri auch auf die übrigen Cofunktionen ausgedehnt wurde. Aus seiner Sphärik heben wir folgendes hervor. Im zweiten Buche derselben teilt er in prop. X den schon dem Menelaus bekannten Satz: $(1+\cos A):(1-\cos A) = \sin(c+b) : \sin(c-b)$ für ein bei C rechtwinkeliges sphärisches Dreieck mit und zeigt dann in prop. XV, dafs $(1+\cos A):(1-\cos A) = \cos^2\frac{A}{2} : \sin^2\frac{A}{2}$ ist, leitet aber diese rein goniometrische Beziehung für einen spitzen Winkel eines sphärischen Dreieckes ab, ein Beweis, wie weit man damals noch von der Schöpfung einer eigenen Goniometrie entfernt war. Es hatte dieser langsame Fortschritt offenbar teilweise seinen Grund in der schwerfälligen jede abkürzende Bezeichnung entbehrenden Schreibweise der Sätze. In der nächsten Proposition verbindet er dann diese beiden Gleichungen zu $\cos^2\frac{A}{2} : \sin^2\frac{A}{2} = \sin(c+b) : \sin(c-b)$, ohne dafs es ihm jedoch beifällt die linke Seite durch $\operatorname{cotg}^2\frac{A}{2}$ zu ersetzen, obwol er die Tangenten von Regiomontan her sehr wohl kannte und auch gut zu verwenden wufste. So sagt er in der prop. XXX: Der Sinus irgend eines Bogens verhält sich zum Cosinus desselben, wie das Gnomon zur „umbra recta“ (Cotangente) und der Cosinus verhält sich zum Sinus wie das Gnomon zur „umbra versa“ (Tangente). Hier ist also endlich einmal die Identität dieser aus der Gnomonik bekannten Funktionen mit denen des Regiomontan, des Rhaeticus und des Reinhold ausdrücklich hervorgehoben.

Aber Maurolycus kennt auch die Sekanten, denn er hat seiner Sphärik neben einer Sinustabelle und einer tabula foecunda auch eine „tabula benefica“ angehängt, welche die Sekanten aller Grade von 0^0 bis 45^0 für den Radius 100000 gibt. Sie ist ohne Zweifel nach Einsicht in den kleinen Kanon des Rhaeticus gearbeitet, wenn es auch nicht richtig ist, was ein jüngerer Zeitgenosse von ihm, der Niederländer Thomas Fink, bemerkt: „Maurolycus hat den Kanon des Rhaeticus wenig verändert wiedergegeben, nur hat er ihm einen anderen Namen beigelegt“ [1]). Jedenfalls hatte

1) Fink, Geometria rotundi 1583. 76. — Der Italiener Joh. Anton Magini nimmt zwar in der Vorrede zu seinem Werke Primum mobile, Bononiae 1609

Maurolycus die Wichtigkeit der Erfindung des Rhaeticus sofort erkannt und zeigte auch an einigen Beispielen die Verwendbarkeit der Sekanten zur Umsetzung der Divisionen in Multiplikationen.

Der schon erwähnte handschriftliche Traktat des Maurolycus ist am 19. März 1555 abgeschlossen, und da in ihm auf die Sphärik verwiesen wird, so mufs diese, nebenbei bemerkt, schon vor diesem Jahre vollendet gewesen sein. In dieser Sphärik hatte er nun bereits in prop. XLVIII, lib. I einen eigentümlichen Satz bewiesen, den er in jenem Traktat wiederholt und aus ihm wichtige Schlüsse zieht. Es ist dies folgender: Schneidet in Fig. 39 der Quadrant cb den Quadranten ab in b rechtwinklig, legt man durch a den beliebigen gröfsten Kreisbogen ae und durch c einen Quadranten cfd so, dafs $\sin cf$ die mittlere geometrische Proportionale zwischen $\sin ce$ und $\sin cb = 1$ wird und zieht noch zwei weitere Quadranten cgh und clk so, dafs auch $\sin cf$ das geometrische Mittel zwischen $\sin cg$ und $\sin cl$ ist, „so kann man die so entstehende Figur als Fundament fast aller zur Berechnung der sphärischen Dreiecke notwendigen Sätze betrachten“. Es ergeben sich nämlich die Folgerungen:

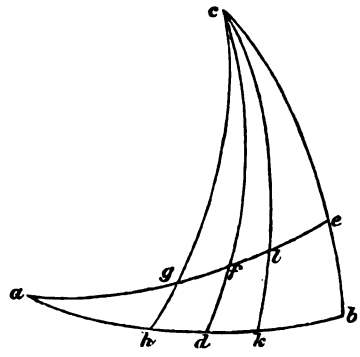


Fig. 39.

1) $af + ad = 90^0$, also $af = db$, $ad = fe$,

2) $gf = dk$, $dh = fl$, also auch $ag = kb$ und $ah = le$,

und hieraus:

$$1 : \sin eb = \sin al : \sin lk = \sin af : \sin fd = \sin ag : \sin gh.$$

Diese Gleichungen genügen mit einigen andern, um die sämtlichen Fälle des rechtwinkligen sphärischen Dreieckes, das je nach Bedarf mit einem der Dreiecke agh, afd, alk identifiziert wird, zu behandeln. Wenn auch in Dschâbir's Werk Anklänge an diesen Satz vorkommen, so ist derselbe doch neu zu nennen, und seine Verwendung als Fundament der sphärischen Trigonometrie bleibt

---

in 2°, seinen Landsmann in Schutz, indem er behauptet, Maurolycus habe die Sekanten selbständig gefunden, da er des Rhaeticus' Kanon wegen seiner geringen Verbreitung unmöglich habe zu Gesicht bekommen können, er selbst habe das Buch nur zufällig vor einigen Jahren in die Hand bekommen. Dessenungeachtet glauben wir, dafs Maurolycus zum mindesten mündlich Kenntnis von der Tafel des Rhaeticus erhalten hatte, wenn sie ihm vielleicht auch nicht selbst zu Gesicht kam.

ein dem Maurolycus origineller Gedanke. Auch verwendet er an dieser Figur gewandt, wie damals noch keiner seiner Zeitgenossen, die Tangenten und Sekanten. Z. B. gegeben arc. $ce = 37^0$, arc. $gh = 23\frac{1}{2}^0$, es soll mittelst der tabula foecunda der Bogen ah gefunden werden[1]). Man sucht in dieser Tafel tg ce und tg gh und setzt das Produkt derselben gleich sin ah, d. h. er benützt in Dreieck agh die Relation $\sin ah = \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{tg} gh$.

Ist ferner in $\triangle agh$, gh und ag gegeben, so findet er die dritte Seite mittelst der Relation $\sec gh \cdot \cos ag = \cos ah$, wodurch die Division durch $\cos gh$ durch die Multiplikation mit $\sec gh$ ersetzt wird.

Wir sehen aus dem Angeführten, dafs Maurolycus völlig auf der Höhe seiner Zeit stand, indem er namentlich das Bedürfnis erkannte, die Trigonometrie unabhängig von der Astronomie auf eigene Füfse zu stellen und in diesem Bestreben nach einigen Richtungen Fortschritte machte; allerdings dürften seine Lehren nicht bedeutend auf die Weiterbildung der Trigonometrie eingewirkt haben, da aufser der Sphärik von seinen Schriften nichts auf unsere Wissenschaft Bezügliches in die Öffentlichkeit drang, und seine Leistungen sehr bald durch die weit gröfseren in Frankreich und Deutschland überholt wurden.

Überhaupt läfst sich in jener Zeit in Italien kein besonderer Aufschwung in der rechnenden Astronomie beobachten, weshalb auch die trigonometrischen Methoden daselbst keine Weiterbildung fanden. Man beschäftigte sich eben immer noch viel zu viel mit der Astrologie, die ernsteren Bestrebungen nur hindernd im Wege stand. So allein ist es erklärlich, dafs damals Gelehrte, wie der Neapolitaner Lucas Gauricus (1476—1558), noch immer zu den geschätztesten Schriftstellern gehörten. Gauricus war zuerst Professor der Mathematik in Ferrara und wurde dann Bischof. Seine gröfstenteils astrologischen Schriften erschienen 1575 in einem umfangreichen Bande gesammelt, in dem wir jedoch aufser einer Schattentafel für ein Gnomon von 12^p, einer tabula foecunda, die für $r = 10^5$ von Grad zu Grad berechnet ist, aber keine besondere Verwendung findet, und einer von 10 zu 10 Minuten fortschreitenden Sinustabelle in Sexagesimalbrüchen nichts Bemerkenswertes finden konnten. Aufser mit dem einträglichen Geschäfte der Nativitätenstellung beschäftigte sich Gauricus, wie die meisten seiner astronomischen Zeitgenossen, mit

1) A. a. O. 81. — Die Aufgabe ist identisch damit, aus Seite gh und $\sphericalangle a$ in $\triangle agh$ die Nebenkathete ah zu finden. Schon Regiomontan hat sie in dieser Weise mit seiner tabula foecunda gelöst, wie auch Maurolycus bemerkt.

der Kommentierung des Sacrobosco, der Revision der Alfonsinischen Tafeln und jener des Regiomontan und Bianchini — eigene Gedanken wird man bei ihm vergebens suchen.

§ 7. Die Trigonometrie in Frankreich bis zum Auftreten Vieta's.

Noch weniger Originalität als bei den italienischen Mathematikern finden wir bis zur Mitte des 16. Jahrhunderts in Frankreich vertreten. Damals war, wie heute noch, Paris Frankreich und an der Pariser Universität erfreuten sich die exakten Wissenschaften, ja selbst die Astronomie, seit im 13. Jahrhundert Johann de Sacrobosco daselbst gelehrt hatte, einer sehr geringen Pflege. Das Verdienst, den Anstofs zur Besserung dieses Zustandes gegeben zu haben, kommt Jacques Lefèvre (1455—1537) zu, der zu den berühmtesten Franzosen in jener Zeit gehörte[1]). Seine reformatorische Thätigkeit bestand hauptsächlich darin, dafs er Neudrucke von bedeutenden Werken veranstaltete, unter denen sich auch die vielgenannte Sphaera des Sacrobosco befand, die er 1507 herausgab.

Als der eigentliche Neubegründer der Mathematik in Frankreich wurde aber der von seinen Zeitgenossen vielbewunderte und viel überschätzte Oronce Fine, latinisiert Orontius Finaeus (1494—1555) angesehen. „Was nur von geistiger Bedeutung in Paris lebte, Männer der Wissenschaft und der schönen Künste, Beamte und Höflinge, Gesandte, Prinzen, der König selbst vereinigten sich in den Vorlesungsräumen des Collège royal, wo Finaeus seit 1532 eine für ihn errichtete Lehrstelle inne hatte und als Professor mit beispiellosem Zulauf wirkte[2])." Doch faſst man die Werke näher ins Auge, welche dieser Mann hinterlassen hat, so wird man sehr bald zu der Überzeugung geführt, dafs diese Überschätzung seiner Zeitgenossen mehr in seiner glänzenden Beredsamkeit und seinem vorzüglichen Lehrtalente, als in hervorragender Gelehrsamkeit ihre Begründung haben konnte. Auch wurde dies aufserhalb Paris damals schon sehr bald erkannt. So schrieb der Portugise Pedro Nuñez, bekannt unter dem Namen Nonius (1492—1577), ein äufserst gründlicher und mit kritischer Schärfe begabter Kopf, ein ganzes Buch über die Irrtümer und Fehler, die sich O. Finaeus in seinen Werken hatte zu Schulden kommen lassen[3]). Dessenungeachtet sind seine Verdienste um die Entwickelung der mathematischen Wissenschaften

1) Vgl. Cantor II. 334, dem auch das Folgende auf allgemeine Geschichte der Mathematik bezügliche entnommen ist. — 2) Cantor II. 345. — 3) De erratis Orontii Finei. Coimbra 1546.

in Frankreich, denen er mit selbstloser Begeisterung seine ganze Kraft widmete, keineswegs zu unterschätzen.

Was speziell die Trigonometrie anlangt, so sahen wir schon, dafs er zur Ablesung der Sinusse ein Instrument beschrieb, dessen Kenntnis er unzweifelhaft von Apian entnommen hatte, aufserdem gab er in seiner Cosmographia 1542[1]) eine für alle Minuten in Sexagesimalbrüchen berechnete Sinustafel, die er am Schlusse noch mit einer Vorschrift versah, um die Sinusse auf den Radius 60000 zu reduzieren. Ein gewisses Verdienst lag immerhin in der Veröffentlichung dieser Tabelle, da sie die erste umfangreichere, die in Frankreich erschien, sein dürfte, wenn sie auch keineswegs die viel vollkommenere erreichte, die Rhaeticus im nämlichen Jahre in seinem libellus de triangulis veröffentlichte. Aufser dieser Sinustafel finden sich auch in jener Cosmographia, sowie in anderen seiner vielen Schriften[2]) Definitionen und Tabellen für die „umbra versa" und „umbra recta" und ihre Beziehungen zu Sinus und Cosinus, aber eine fruchtbare Verwendung derselben als trigonometrische Funktionen kam ihm nicht in den Sinn, ebenso bewegt er sich bei Bestimmung der kürzesten Entfernung zweier Orte auf der Erde noch ganz in der herkömmlichen Bahn, indem er Werner's umständliches Verfahren genau reproduziert. So hat ihn also die Geschichte der Trigonometrie nur nebenbei zu nennen als einen Mann, der insofern indirekt zu ihrem Aufschwunge beitrug, als er das Ansehen der mathematischen Wissenschaften in Frankreich überhaupt hob.

Ähnliches gilt auch von seinem nicht weniger berühmten jüngeren Landsmann, dem streitbaren Petrus Ramus, eigentlich Pierre de la Ramée (1515—1572)[3]), der infolge seiner Beteiligung an den politischen und religiösen Kämpfen ein Opfer der Bartholomäusnacht wurde. Auch er trug zur Hebung des Ansehens der exakten Wissenschaften sein redlich Teil bei, ohne sich im Speziellen durch bedeutende Arbeiten hervorzuthun. Von besonderem Interesse ist seine Wertschätzung der deutschen Bildung und Kultur, die er in seinen „Scholae mathematicae" 1567 mit überschwenglichen Lobsprüchen bedenkt — dies beweist wenigstens, dafs damals in Deutsch-

1) O. Finei Delphinatis regii mathematicorum professoris de mundi sphaera sive Cosmographia, Paris 1542. 2°. — 2) Z. B. in: Protomathesis, Parisiis 1532. fol. 139, und in: O. Finaei in eos quos de Mundi sphaera conscripsit libros, ac in Planetarum theoricas, Canonum Astronomicorum libri II. Paris 1553. 4°. 26. Canon XIX. — 3) Ramus lebte bis 1568 in Frankreich, dann machte er zu wissenschaftlichen Zwecken eine Reise durch Deutschland und kehrte 1570 wieder nach Paris zurück.

land thatsächlich die mathematischen Disziplinen in höherer Blüte standen, als in Frankreich.

Ein etwas älterer Zeitgenosse von Ramus endlich ist der Schotte James Bassantin[1]), geboren um 1504, gestorben 1568. Er lehrte in Paris mehrere Jahre mit grofsem Erfolge und veröffentlichte im Jahre 1557 ein Werk „Astronomique discours[2])", woraus sich ergibt, dafs er des Coppernicus Methoden zur Berechnung sphärischer Dreiecke sehr genau kennt, wie ihm natürlich auch die Bücher des Regiomontan nicht fremd sind. In einem eigenen Kapitel bringt er nach der noch immer herrschenden Sitte einen kurzen Abrifs der ebenen und sphärischen Trigonometrie, der sich enge an seine Vorbilder anschliefst. Die beigegebene Sinustafel ist genau, wie die des Regiomontan eingerichtet und für den Radius 100000 berechnet. Den weit praktischer abgefafsten libellus des Rhaeticus, sowie dessen kleinen Kanon scheint er demnach nicht gekannt zu haben.

8. Kapitel.

Vom Auftreten Vieta's bis zur Erfindung der Logarithmen.

§ 1. Franciscus Vieta als Begründer der Goniometrie.

Aufser den im vorigen Kapitel genannten Männern hat Frankreich im 16. Jahrhundert eine Persönlichkeit hervorgebracht, deren bahnbrechender Einfluſs im Gebiete der Algebra längst bekannt, deren enorme Bedeutung für unser spezielles Wissensgebiet aber bisher keineswegs in genügender Weise gewürdigt wurde, wir meinen Franz Vieta, den gröfsten französischen Mathematiker des 16. Jahrhunderts.

Francois Viète Seigneur de la Bigotière[3]) ist 1540 in Fontenay-le-Comte, der Hauptstadt von Poitou, geboren und 1603 in Paris gestorben. Er widmete sich der Rechtsgelehrsamkeit, und nachdem er seine Studien in Poitiers vollendet hatte, machte er sich 1559 in seiner Vaterstadt als Rechtsanwalt ansäfsig, trat aber bald

---

1) Er war ein Sohn des Lord Bassendean in Berwickshire und widmete sich nach Vollendung seiner Studien zu Glasgow ausschliefslich der Mathematik und Astronomie. Später durchreiste er den ganzen Kontinent und liefs sich schliefslich in Paris nieder. Dictionnary of national Biography III. 372. — 2) In Lion bei Jean de Tournes erschienen, der auch 1599 eine lateinische Ausgabe des sehr brauchbaren Werkes besorgte. — 3) Authentische Nachrichten über das Leben Vieta's sind erst durch Fréderic Ritter gesammelt worden, dessen Schrift „Francois Viète", Notice sur sa vie et son oeuvre 1895 in Paris in 8° erschien, nachdem sie schon 1888 vollendet war.

als Privatsekretär in die Dienste des den Guise's feindlichen Hauses der Soubise, durch das er später mit den Führern der Hugenottenpartei Condé, Coligny und Johanna d'Albert, der Mutter Heinrich's von Navarra, des nachmaligen Königs Heinrich IV. bekannt wurde. Schon damals trug er sich, veranlafst durch den Unterricht, den er der Katharina von Parthenay aus dem Hause Soubise erteilte, mit dem Plane, ein den Almagest des Ptolemäus ersetzendes Werk „Harmonicum coeleste" zu verfassen, das nachmals auch zustande kam, aber nur handschriftlich blieb. Leider ist davon nur noch ein kleines Bruchstück vorhanden. Die Herstellung dieser Schrift veranlafste ihn vor allem der Goniometrie und Trigonometrie sein Augenmerk zu schenken und genaue, verwendbare Tafeln zu schaffen; damit scheint er schon frühzeitig begonnen zu haben in einer ersten Periode relativer Mufse (1564—68), wie er sie später nur noch einmal in seinem Leben (1584—89) genieſsen sollte. 1571 ging er als Advokat nach Paris und trat dort baldigst in Beziehung zu den damals bedeutendsten Männern der Wissenschaft, von denen wir nur Petrus Ramus und Forcatel nennen; 1573 wurde er Parlamentsrat und bald auch Privatsekretär bei Heinrich III., der ihn 1580 zum Maître des requêtes, d. h. Berichterstatter über Bittschriften und zum königlichen Rat erhob. Aber schon 1584 fiel er infolge der gegen ihn von den Herzögen von Guise und Nemours geschmiedeten Intriguen in Ungnade und mufste sich vom Hofe zurückziehen, an den er erst wieder kam, als sich Heinrich III. 1589 gezwungen sah, Paris zu verlassen und den Sitz seiner Regierung nach Tours zu verlegen. Als der König noch im selben Jahre unter dem Dolche des Mörders gefallen war, und Heinrich von Navarra als Heinrich IV. den Thron bestiegen hatte, wurde Vieta von diesem zum geheimen Rate ernannt, in welcher Eigenschaft er auch bis an sein Lebensende verblieb. Die intime Stellung, welche er schon bei Heinrich's Mutter und dann bei dem Könige selbst einnahm, bürdete seinen Schultern eine so gewaltige Arbeitslast auf, dafs er seiner Lieblingsneigung, der Beschäftigung mit mathematischen und astronomischen Studien, nur wenig Zeit widmen konnte; und doch gehörte sein angeborenes Talent diesen Wissenschaften an, und seine schriftstellerische Thätigkeit in ihnen mufs, trotz der geringen Mufse, eine äufserst fruchtbare und Epoche machende genannt werden.

Speziell den uns interessierenden Wissenszweig pflegte er mit besonderer Vorliebe, denn die Erfindung der Trigonometrie erklärte er als den höchsten Ruhm der Mathematiker, da sie Himmel, Erde und Meere durch einen wunderbaren Kalkül zu messen

lehre[1]). So bot auch für ihn die praktische Verwendbarkeit der Trigonometrie die erste Veranlassung zu ihrem weiteren Ausbau, aber seinem mathematischen Geiste entsprechend scheint doch in der Folge das theoretische Interesse mehr als bei irgend einem seiner Vorgänger in den Vordergrund getreten zu sein. Leider gerieten seine Schriften ebenso rasch, als sie bekannt geworden waren, wieder in Verlust, so dafs Franz van Schooten, der 1646 eine Gesamtausgabe derselben veranstaltete, sie nicht mehr alle auffinden konnte.

Diese Sammlung von Vieta's Schriften enthält die für uns wichtigste, den „Canon mathematicus seu ad triangula cum appendicibus. Lutetiae 1579. in fol."[2]) nicht. Schooten sagt, er habe den Kanon nicht in seine Sammlung aufgenommen, weil ihn Vieta selbst später als „infeliciter editus" bezeichnete[3]), da er durch zahllose Druckfehler entstellt gewesen sei. Wir haben ihn mit dem Thesaurus des Pitiskus verglichen und konnten nur sehr wenige Druckfehler finden, ein Resultat, das auch mit Ritter's Behauptung übereinstimmt. Vieta mufs also andere Gründe für seine Absicht, eine Neuausgabe zu veranstalten, gehabt haben. Vielleicht wollte er eine passendere Bezeichnung für die Funktionen einführen[4]), vielleicht auch eine andere Anordnung der Tafeln treffen. Zu der Ausführung dieses Vorhabens gelangte er jedoch nicht mehr; dagegen erschien 1609, sechs Jahre nach seinem Tode, eine unveränderte Ausgabe des Werkes zu Paris[5]): es scheint demnach die erste thatsächlich nur mehr in wenigen Exemplaren vorrätig gewesen zu sein. Das Werk war auf vier Bände angelegt, von denen jedoch nur zwei erschienen sind. Jetzt gehören beide Auflagen zu den gröfsten Seltenheiten und scheinen auch nie eine grofse Verbreitung gefunden zu haben, denn man findet sie in der zeitgenössischen Litteratur nur wenig erwähnt.

Uns liegt ein Exemplar der ersten Ausgabe vor, dem wir Folgendes entnehmen. Vieta's Kanon, dessen Druck bereits 1571 begann, ist ohne Zweifel entstanden, nachdem derselbe von dem kleinen Kanon des Rhaeticus Einsicht genommen hatte. Dafür spricht nicht nur die Bezeichnung „perpendiculum", „basis" und „hypotenusa", die er in derselben Weise wie jener gebraucht, sondern

---

1) Francisci Vietae Opera mathematica in unum volumen congesta ac recognita opere et studio Fr. à Schooten. Lug. 1646. 2°. 405. — 2) Der Name des Autors ist auf dem Titelblatt nicht angegeben, sondern findet sich erst in dem 2. Teile, der dem Kanon als Anhang beigegeben ist. — 3) Opera 323. — 4) Ritter a. a. O. 54—55. — 5) Von seiner Absicht einer Neuauflage spricht Vieta. Opera. 371 und 400. — Auf die zweite Auflage macht Enestroem aufmerksam. Bibliotheca math. 1893. 92.

noch viel mehr die Einteilung der 6 Funktionen in 3 Serien, die wie bei Rhaeticus erhalten werden, indem er nach einander die Hypotenuse, die gröfsere und die kleinere Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes gleich dem Sinustotus 100000 setzt. Ebenso unzweifelhaft hat aber Vieta seinen Kanon auch selbständig berechnet, denn seine Methoden waren von den bisher gebräuchlichen zum grofsen Teile verschieden. Er berechnete zunächst sin 1′ auf 13 Dezimalen, von denen 10 richtig sind, und zwar dadurch, dafs er von den Seiten der ein- und umgeschriebenen 6144 und 12288 Ecke ausgehend, die durch Zweiteilung zu erhalten waren, die Sinusse der Winkel von $\frac{450}{256}' = 1{,}7523 \ldots'$ und $\frac{225}{256}' = 0{,}8789 \ldots'$ bestimmte[1]) und hieraus durch eine Interpolation, deren Entzifferung uns jedoch nicht gelungen ist, sin 1′ = 0,0002908882046 folgerte. Die Berechnung dieses Wertes, der als Grundlage für die ganze Tafel diente, wurde von ihm deshalb so weit getrieben, weil er wohl erkannte, dafs durch eine Beschränkung desselben auf nur 5 Dezimalen (ähnlich wie bei Reinhold geschehen war, und wie es nachmals im Opus Palatinum nicht vermieden wurde) die übrigen Funktionen der Winkel des ersten Grades höchstens eine Genauigkeit von 3 oder 4 Dezimalen erhalten haben würden. Dies hebt er auch S. 17 ausdrücklich hervor.

Was die äufsere Einrichtung des trigonometrischen Kanons anlangt, so umfafst jeder Grad zwei nebeneinander aufliegende Folioseiten; die Seite links enthält die Funktionen aller Minuten von 0′ bis 30′ und die Cofunktionen von 30′ bis 60′, die Seite rechts die Funktionen der Minuten von 30′ bis 60′ und die Cofunktionen von 0′ bis 30′. Kopf und Fufs jedes Blattes sind ähnlich wie bei Rhaeticus bezeichnet; aufserdem steht bei der ersten Serie: e canone sinuum, bei der 2. und 3. e canone foecundo foecundissimoque; die Differenzen sind rot zwischen die Zahlen eingeschrieben.

Aufser diesem grofsen trigonometrischen Kanon enthält das umfangreiche Tabellenwerk ein nach Vieta's eigenem spätern Ausspruch praktisch wenig verwendbares „Canonion triangulorum laterum rationalium", das nur dadurch von Interesse ist, dafs hier zum erstenmale in ausgedehnter Weise von den zweiten Differenzen Gebrauch gemacht wird[2]), ferner eine Tafel zur Multiplikation der Sexagesimalbrüche, eine Tabelle aller 6 Funktionen von Grad zu Grad in ebensolchen Brüchen, eine Tafel aller Funktionswerte von 0° bis 90° für den Radius 1000 und eine Reduktionstabelle der am häufigsten verwendeten Brüche.

1) A. a. O. p. 60 und 67. 2. Teil. — 2) Näheres über diese Tafel bei Ritter a. a. O. 45—47 und Hutton in seiner Introduction to the logarithmic tables, abgedruckt in: Maseres, Scriptores logarithmici Vol. I. IX—X.

Dem Tabellenwerk folgt als zweiter Teil eine Schrift, die den Titel führt: „Francisci Vietaei universalium inspectionum ad canonem mathematicum liber singularis.“ Lutetiae 1579.

Wir sahen, dafs Rhaeticus durch die Veröffentlichung seines Kanons zum erstenmale die 6 trigonometrischen Funktionen als gleichwertige Mittel zur Berechnung der Dreiecke proklamierte; da er jedoch in dem angehängten Dialoge nur Andeutungen, aber keine Vorschriften gab, wie dies zu geschehen habe, so mufste sich jeder, der die neuen Funktionen verwenden wollte, das Fundament dazu erst selbständig schaffen. Maurolycus hatte sich dieser Arbeit zunächst unterzogen, indem er die neuen Hilfsmittel, wenn auch in beschränktem Mafse, gebrauchen lehrte. Ganz anders ist dies dem schöpferischen Talent eines Vieta gelungen, dem wir die erste systematische Ausbildung der Methoden zur Berechnung ebener und sphärischer Dreiecke unter Zugrundlegung sämtlicher 6 Funktionen im Abendlande verdanken[1]). Ein Teil der hierauf bezüglichen Sätze ist bereits in dem eben genannten zweiten Teile des Kanons enthalten, ihren vollständigen Ausbau aber finden sie erst in dem 8. Buche „Über verschiedene mathematische Aufgaben“[2]), das 1593 erschien. Aber nicht nur nach dieser Richtung hat Vieta bahnbrechend gewirkt, sondern er ist auch der Schöpfer einer selbständigen Goniometrie zu nennen, indem er in der älteren Schrift zunächst die zur Berechnung des Kanons notwendigen Beziehungen der Funktionen eines Winkels unter sich und verschiedene Zweiteilungsformeln gibt, in dem späteren Werke aber dann eine Reihe von Relationen zwischen den verschiedenen Funktionen zweier und mehrerer Winkel entwickelt, zu denen noch als Krönung des Ganzen seine Entdeckungen über die n-Teilung der trigonometrischen Funktionen kommen.

Wir wollen zunächst diese goniometrischen Leistungen ins Auge fassen und dann erst seine trigonometrischen Rechnungsmethoden betrachten. Zunächst ist die Einführung und Beibehaltung der Bezeichnung ABC für das bei C rechtwinklige Dreieck, dessen spitze Winkel stets A und B genannt werden, bemerkenswert. AB heifst die Hypotenuse, AC das Perpendikel und BC die Basis. Je nachdem eine dieser Seiten mit dem Sinus totus identifiziert wird, ergeben sich wie bei Rhaeticus die 6 in 3 Serien geordneten Funktionen. Vieta fühlt aber ganz richtig das Bedürfnis, auch für

1) Die Schwierigkeit, die Vieta's Schriften durch ihre dunkle Schreibweise bieten, dürfte der Grund für die sonst sehr merkwürdige Erscheinung sein, dafs dies noch von keinem Historiker ausgesprochen wurde. — 2) Variorum de rebus mathematicis responsorum liber octavus. Opera 417 ff.

die Funktionen der zweiten und dritten Serie eigene Bezeichnungen einzuführen, was sein Vorgänger unterlassen hatte. Zu diesem Zwecke schlägt er zuerst (p. 9) für die Tangente und Sekante die Bezeichnung „Sinus", beziehungsweise „Hypotenusa foecundarum"[1]), oder kürzer „Foecundus" und „Hypotenusa", vor und bezeichnet die Cofunktionen durch Beisetzung von residuae; so heifst z. B. die Cotangente „Foecundus residuae". Hiermit selbst nicht zufrieden führt er dagegen in dem Werke von 1593 für die Tangente die Namen „Amsinus" oder „Prosinus" und für die Sekante „Transsinuosa" ein, welche er auch schliefslich beibehält.

Doch kommen wir wieder auf das ältere Werk zurück, indem wir diejenigen goniometrischen Sätze, die hier zum erstenmale auftreten, oder doch durch ihre Form bemerkenswert sind, in unserer Formelsprache anführen. Diese sind:

1) $\sin\alpha = \sin(60^0+\alpha) - \sin(60^0-\alpha)$[2]); 2) $\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$;

3) $-\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{cosec}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$[3]).

Mit diesen gelingt es, aus den Tangenten aller unter 45^0 liegender Winkel die übrigen Tangenten und alle Sekanten durch bloſse Addition und Subtraktion zu finden.

4) $1 : 2\operatorname{crd}\alpha = \sin\frac{\alpha}{2} : \operatorname{sinvers}\alpha = \cos\frac{\alpha}{2} : \sin\alpha$,

und hieraus folgen die längst bekannten Formeln

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sinvers}\alpha \quad \text{und} \quad \sin\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Hieran schlieſsen sich dann die beiden wichtigen Gleichungen:

5) $1 : \operatorname{crd}(\alpha-\beta) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2} : (\cos\beta - \cos\alpha) = \cos\frac{\alpha+\beta}{2} : (\sin\alpha - \sin\beta)$[4]),

d. h. $$\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

und $$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$[5]).

Dann folgt auf S. 21 eine Zusammenstellung der Gleichungen:

---

1) Weil, wie er sagt, „die Rhapsoden ihre Canones Foecundos nennen". Unter den Rhapsoden sind demnach Regiomontan und Reinhold verstanden. — 2) Hiermit gewinnt man aus den Sinussen der Winkel bis 30° die der übrigen Winkel durch alleinige Addition und Subtraktion. — 3) Statt des halben Winkels wird auch der ganze eingeführt. a. a. O. 11. Nr. 2. — 4) p. 20. Nr. 4 und 5. — 5) Da Vieta schon früher $\operatorname{crd}(\alpha-\beta) = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ angegeben, so sind diese Formeln mit den unter 5) gegebenen identisch. Die erste derselben fanden wir schon bei den Arabern und bei Werner.

6) $1:\sec\alpha = \cos\alpha:1 = \sin\alpha:\operatorname{tg}\alpha$; 7) $\operatorname{cosec}\alpha:\sec\alpha = \operatorname{ctg}\alpha:1 = 1:\operatorname{tg}\alpha$;

8) $1:\operatorname{cosec}\alpha = \cos\alpha:\operatorname{ctg}\alpha = \sin\alpha:1$.

Einige weniger wichtige Formeln übergehen wir. Man wird sich fragen, wie ist Vieta zu dieser Menge von gröfstenteils neuen Beziehungen gelangt? Die dunkle Schreibweise, die alle seine Schriften auszeichnet und auf absichtliche Verschleierung des Gedankenganges hinzielt, läfst dies nicht sofort erkennen, doch war Vieta's gesamtes mathematisches Wissen aus dem Studium der griechischen Schriftsteller hervorgegangen, und so zeigt es sich denn, wie sich hiernach vermuten läfst, thatsächlich, dafs alle seine Sätze auf geometrischem Wege und zwar aus Figuren abgeleitet sind, welche sich teilweise mehrere Seiten vor den entsprechenden Sätzen ganz unvermittelt aufgezeichnet finden. So gewinnt er z. B. die Sätze der Formel 5) aus der Fig. 40 unmittelbar fast durch den bloſsen Anblick. Es sei $A\gamma=\alpha$, $B\gamma=\beta$, dann ist $AB=\operatorname{crd}(\alpha-\beta)$, $\cos\beta = OF$, $\cos\alpha = OD$, also $\cos\beta - \cos\alpha = DF = BC$ und ebenso $\sin\alpha - \sin\beta = AC$, ferner $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, und also im Dreieck ABC nach Vieta's Schreibweise: $\sin C : AB = \sin A : BC = \cos A : AC$, woraus unmittelbar Formel 5) folgt.

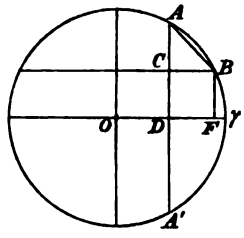


Fig. 40.

Weit mehr noch, als in dem Anhange zum Canon mathematicus, zeigt sich Vieta's Geschick in der Aufstellung goniometrischer Relationen in seinem Werke von 1593. Diese Schrift bietet, soweit sie Trigonometrisches enthält, keineswegs ein zusammenhängendes Lehrgebäude, sondern besteht lediglich aus einer Sammlung von zu sehr verschiedenen Zeitpunkten entstandenen goniometrischen und trigonometrischen Theoremen. Die ersteren finden sich ziemlich vollständig in Nr. XXI der Schrift (S. 411—415 der Opera) und sind sämtlich ohne irgend welche Ableitung angegeben, wohl aber in verschiedene Gruppen gesondert.

Die erste Gruppe umschliefst die drei prosthaphäretischen Regeln[1]); die zweite Gruppe umfafst 16 Sätze, welche lediglich die Beziehungen der Funktionen eines, zweier und dreier Winkel untereinander geben und von unserm Standpunkte viel Überflüssiges enthalten[2]). Dagegen

1) Diese erscheinen übrigens hier auch in ihrer Gesamtheit nicht zum erstenmale, sondern waren schon früher in Deutschland im Gebrauche, wie wir weiter unten sehen werden. — 2) Eine solche Formel ist z. B. die in Satz 7 ausgesprochene: $(\sin\alpha\cos\beta):(\sin\beta\cos\alpha) = \operatorname{tg}\alpha:\operatorname{tg}\beta$. Ähnlich gibt Satz 16 die Formel: $(1\cdot\operatorname{tg}\alpha):(\sin\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma) = (\operatorname{cosec}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma):(1\cdot\operatorname{ctg}\alpha)$. — Statt des Sinus totus haben wir überall 1 geschrieben!

ist die dritte und letzte Gruppe von Wichtigkeit, welche die Formeln umfafst, die uns lehren, aus dem gegebenen Verhältnis gleichartiger Funktionen zweier Winkel, deren Summe oder Differenz bekannt ist, die Winkel selbst zu finden. Sie müssen also als eine erstmalige Ausdehnung des Satzes von Ptolemäus (S. 23—24) auf die Funktionen Tangens und Secans angesehen werden.

Eine solche Formel ist in unserer dem Wortlaut genau entsprechenden Formelsprache z. B.

$$\sec\alpha : \sec\beta = \sec(90^0 - (\alpha + \beta)) : [\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}(90^0 - (\alpha + \beta))],$$

woraus $\operatorname{tg}\beta$ sich unmittelbar ergibt, wenn das Verhältnis der beiden Sekanten und $\alpha + \beta$ gegeben ist. Als vorletzter dieser Sätze findet sich folgender:

$$(\sin\alpha + \sin\beta) : (\sin\alpha - \sin\beta) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\,^{1}).$$

Derselbe hat, wie sich zeigen wird, schon 10 Jahre früher zur Aufstellung unseres Tangentensatzes der ebenen Trigonometrie geführt.

Auch diese letzteren goniometrischen Sätze dürften schon bald nach der Veröffentlichung des Kanons, also in den achtziger Jahren des 16. Jahrhunderts, entstanden und von Vieta selbständig entwickelt worden sein; jedenfalls finden sie sich in dieser präzisen Form, sowie in der übersichtlichen, systematischen Darstellung, in der sie Vieta gibt, vor dem Jahre 1593 nirgends.

Aber damit sind Vieta's Verdienste um die Goniometrie keineswegs erschöpft; vielmehr liefs ihn seine erfolgreiche Beschäftigung mit der Winkelteilung Resultate finden, an die vor ihm kaum Jemand gedacht hatte. Es sind uns zwei Bruchstücke von Schriften erhalten, deren reicher Inhalt das Fehlen der übrigen Teile lebhaft bedauern läfst. Das eine ist ein Anhang zu seiner „Isagoge in artem analyticam" mit der Überschrift: „Ad Logisticen speciosam notae priores"[2]), die notae posteriores sind leider verloren oder nie fertig gestellt worden; das andere führt den Titel: „Ad angulares sectiones theoremata in tres partes distributa" und wird bereits 1591 erwähnt. Herausgegeben wurden jedoch erst 1615 die 10 Hauptsätze desselben, welche Alexander Anderson, ein Mathematiklehrer in Paris, mit Beweisen versah[3]). Beide Schriften bilden einen Teil jenes grofsen

1) Opera p. 415. Es ist nicht richtig, was Ritter a. a. O. 53 behauptet, dafs dieser Satz schon im Kanon von 1579 steht; die Tangenten sind dort zur Lösung jener Aufgabe noch nicht verwendet. — 2) Opera 13—41. — Diese Noten bilden den zweiten Teil der Logistica speciosa, sind aber erst 1631 von Jean de Beaugrand veröffentlicht. Vgl. die Übersetzung von Fr. Ritter ins Französische. Bulletino di bibl. e di storia. I. 245—276. — 3) Opera 287—304. Dafs sie schon im Kanon von 1579 enthalten sind, wie Montucla

Werkes, in welchem Vieta seine epochemachenden algebraischen Untersuchungen niederlegen wollte, und bieten die interessanteste Anwendung seiner neuen algebraischen Methode auf die Geometrie. In ihnen kommen zum erstenmale algebraische Rechnungen und Umformungen in der Trigonometrie zur Verwendung.

Was uns von den genannten Noten interessiert ist folgendes: Es seien die Seiten zweier rechtwinkliger Dreiecke mit der Hypotenuse beginnend nach einander mit Z, B, D und mit X, F, G bezeichnet — zum erstenmale tritt hier eine für die Rechnung passende kürzere Bezeichnung auf — dann ist $Z^2 = B^2 + D^2$ und $X^2 = F^2 + G^2$, und hieraus folgt:

$$\text{(I)} \quad (ZX)^2 = (B^2 + D^2)(F^2 + G^2) = (BG + DF)^2 + (BF - DG)^2 = (BF + DG)^2 + (BG - DF)^2,$$

eine Zerlegung, die für bestimmte Zahlen seit Diophant bekannt war[1]). Durch diese Formel sind nun aus den Seiten jener zwei Dreiecke die Seiten eines dritten rechtwinkligen Dreieckes abgeleitet, die entweder ZX, $BG + DF$ und $BF - DG$ oder ZX, $BF + DG$ und $BG - DF$ heifsen. Setzt man jetzt die Identität der beiden ursprünglichen Dreiecke voraus, indem man $Z = X = A$, $F = B$, $G = D$ schreibt, so ergeben sich die neuen Formeln

$$\text{(II)} \quad (A^2)^2 = (2B \cdot D)^2 + (B^2 - D^2)^2 \quad \text{und} \quad A^2 = B^2 + D^2,$$

von denen die erstere einem rechtwinkligen Dreiecke zugehört, dessen Hypotenuse A^2 und dessen Katheten $2B \cdot D$ und $B^2 - D^2$ sind. Fafst man jetzt D als Sinus und B als Cosinus des spitzen Winkels α in dem ursprünglichen Dreieck auf, so hat das neue Dreieck, wie Vieta ohne Beweis angibt, einen spitzen Winkel gleich 2α, so dafs also in unserer Schreibweise $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2B \cdot D$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = B^2 - D^2$ ist[2]). Leitet man jetzt auf dieselbe Weise aus dem Dreieck mit den Seiten $Z = A$, B, D und dem eben gefundenen mit den Seiten A^2, $2BD$, $B^2 - D^2$ ein drittes ab, so erhält man

$$\text{(III)} \qquad (A^3)^2 = (3B^2D - D^3)^2 + (B^3 - 3D^2B)^2,$$

eine Relation, die einem rechtwinkligen Dreieck mit dem spitzen Winkel 3α zugehört, so dafs also:

---

anführt, ist unrichtig, im Gegenteil sagt Vieta: Opera 400, dafs er bei der Neuausgabe desselben diese seine analytische Methode zur Berechnung benützen werde.

1) Cantor I. 2. Aufl. 451. — 2) Da ihm diese Formeln aus dem Additionstheorem längst bekannt waren, so wird er wohl umgekehrt von ihnen ausgehend auf die Verdoppelung des Winkels geschlossen haben.

$$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha \sin\alpha - \sin^3\alpha = 3B^2D - D^3,$$
$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = B^3 - 3D^2B$$

ist. Setzt man weiter in (I) $Z = A$, $X = A^3$, $F = 3B^2D - D^3$, $G = B^3 - 3D^2B$, so erhält man die bekannten Formeln für $\sin 4\alpha$ und $\cos 4\alpha$ u. s. w.

Vieta begnügt sich übrigens nicht damit, gezeigt zu haben, wie man in jedem speziellen Falle die Sinusse und Cosinusse der ganzzahligen Vielfachen eines Winkels durch beide Funktionen desselben Winkels ausdrückt, sondern er erkennt auch im Ganzen richtig das Gesetz der Bildung dieser Ausdrücke[1]), indem er bemerkt, dafs die auftretenden Koeffizienten dieselben sind, wie in der Potenz $(B+D)^n$, welche man seit dem Erscheinen von Michael Stifel's Arithmetica integra 1544 kannte[2]). Auch gibt er an, dafs die einzelnen Terme „homogen" sein müssen und dafs die Zeichen abwechseln, sonst aber mufste der Wortlaut seiner Regel unbestimmt und dunkel ausfallen, da ja die richtigen Werte von $\cos n\alpha$ und $\sin n\alpha$ sich aus $B = \cos\alpha$ und $D = \sin\alpha$ nicht nach der Entwickelung von $(B+D)^n$, sondern von $(B + D\sqrt{-1})^n$ zusammensetzen. Wir sehen hieraus, wie nahe Vieta bereits an die Erfindung des Satzes von Moivre streifte[3]).

Dieselben Regeln, zu denen er bei seiner successiven Bildung der Dreiecke gelangte, finden sich auch im III. Theorem seiner Schrift über die Winkelteilung, allerdings nur in Worten, ohne Rechnung und Beweis angeführt[4]). Aber er geht darin noch weiter, indem er auch die Entwickelungen der Cosinusse und Sinusse der ganzzahligen Vielfachen eines Winkels nach den Potenzen je einer dieser Funktionen lehrt. — Doch besprechen wir die wichtigsten der 10 Theoreme, die uns Anderson aus jener verschollenen Schrift Vieta's überliefert hat, in ihrer Reihenfolge!

Die Theoreme I und II (Opera 287—88) umschliefsen die Formeln

$$\text{I.} \begin{cases} \sin\alpha = \sin(2\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) - \sin(\alpha+\beta)\cos(2\alpha+\beta), \\ \cos\alpha = \cos(2\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta)\sin(2\alpha+\beta), \end{cases}$$

$$\text{II.} \begin{cases} \sin(2\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta)\sin\alpha, \\ \cos(2\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta)\cos\alpha - \sin(\alpha+\beta)\sin\alpha. \end{cases}$$

Das II. Theorem (einfach die Additionsformel) diente ihm zur successiven Berechnung der Funktionen vielfacher Winkel, wie sie

1) Opera p. 37. — 2) Cantor II. 397 ff. — 3) Fr. Ritter spricht ihm diese Erfindung 271. Anmerk. 1. der zuletzt angeführten Abhandlung, wie auch Seite 63 seiner Monographie zu, doch scheint uns damit etwas zu viel gesagt. — 4) Opera 289, vgl. auch ebenda 371—375.

im Theorem III angeführt wird, dessen Inhalt wir schon aus den Notae priores kennen. Wichtig sind das IV. und V. Theorem (291—294), die durch folgende Proportionen wiedergegeben werden:

$$\sin\alpha : \sin 2\alpha = \sin(n-1)\alpha : [\sin(n-2)\alpha + \sin n\alpha],$$

$$\tfrac{1}{2} : \cos\alpha = \cos(n-1)\alpha : [\cos(n-2)\alpha + \cos n\alpha].$$

Die beiden Formeln sind bei Berechnung der Sinustabellen sehr nützlich und wurden zu diesem Zwecke auch von Rhaeticus verwendet. Derselbe mufste also schon lange vor Vieta in ihrem Besitze gewesen sein, da er ja bereits 1576 gestorben war. Hervorragendes Interesse verdienen die Theoreme VI und VII (294—297), indem in ihnen die Reihenentwickelungen von $\cos n\alpha$ und $\sin n\alpha$ nach den Potenzen von $\cos\alpha$, bezüglich $\sin\alpha$, angegeben werden, und zwar hat Vieta das Bildungsgesetz der auftretenden Koeffizienten richtig erkannt und in einer Weise dargestellt, dafs man seinen Gedanken zu entziffern vermag[1]). Die Darstellung ist folgende:

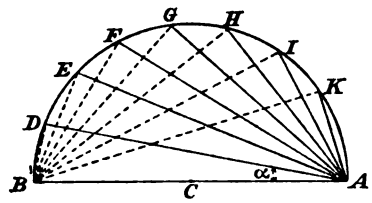


Fig. 41.

Es seien auf der Peripherie eines Halbkreises (Fig. 41) von dem Eckpunkte B des Durchmessers lauter unter sich gleiche Bögen $BD = DE = EF = FG = \cdots = \alpha$ abgeschnitten und ihre Endpunkte mit dem andern Endpunkte A verbunden, und AB sei gleich 2 gesetzt, dann ist $AD = 2\cos\alpha$. Setzt man diesen Wert $= x$, so folgt:

$$2\cos\alpha = AD = x,$$
$$2\cos 2\alpha = AE = x^2 - 2,$$
$$2\cos 3\alpha = AF = x^3 - 3x,$$
$$2\cos 4\alpha = AG = x^4 - 4x^2 + 2,$$
$$2\cos 5\alpha = AH = x^5 - 5x^3 + 5x,$$
$$2\cos 6\alpha = AI = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2 \text{ u. s. w.}$$

Vieta, der diese Reihe bis zu $\cos 10\alpha$ fortsetzt, bemerkt nun, dafs die Terme rechts abwechselndes Zeichen haben, dafs die Exponenten der Potenzen immer um zwei abnehmen und dafs die Koeffizienten aller zweiten Glieder die natürlichen Zahlen, die aller dritten Glieder die Dreieckszahlen, die der vierten Glieder die Pyramidalzahlen u. s. w., alle mit 2 beginnend sind, womit das Bildungsgesetz erkannt war. — Im VII. Theorem werden für $2\sin\alpha = x$ und $2\sin 2\alpha = y$ die Reihen:

1) Montucla hat in seiner Histoire des mathématiques zum erstenmale auf diese Entwicklung hingewiesen. I. 608.

$$2 \sin \alpha = x,$$
$$2 \sin 2\alpha = y,$$
$$2x \sin 3\alpha = y^2 - x^2,$$
$$2x^2 \sin 4\alpha = y^3 - 2yx^2,$$
$$2x^3 \sin 5\alpha = y^4 - 3y^2x^2 + x^4,$$
$$2x^4 \sin 6\alpha = y^5 - 4y^3x^2 + 3yx^4 \text{ u. s. w.}$$

aufgestellt, und auch hier wird das Bildungsgesetz aus der Kenntnis der figurierten Zahlen abgeleitet. Ähnlich gibt er in dem IX. Theorem noch die Darstellung der Sinusse der ungeraden und der Cosinusse der geraden Vielfachen eines Winkels durch die Potenzen des Sinus des einfachen Winkels allein.

Es wurde schon erwähnt, dafs alle diese wichtigen Sätze von Vieta beweislos mitgeteilt wurden; jedoch besteht kein Zweifel, dafs Anderson seine beigegebenen Beweise im Sinne Vieta's gestaltete; denn sie beruhen auf geometrischer Basis und bedienen sich hauptsächlich des bekannten Ptolemäischen Satzes für das Sehnenviereck. — Am Schlusse seiner Mitteilung ruft Vieta in stolzem, aber berechtigtem Selbstgefühl aus: „Also enthält die Analyse der Winkelschnitte geometrische und arithmetische Geheimnisse, die bisher von Niemandem durchschaut worden sind“[1]). Er hatte also offenbar keine Ahnung davon, dafs gleichzeitig mit ihm, ja vielleicht schon etwas früher, der Schweizer Jobst Bürgi dieselbe Frage mit nicht geringerem Geschick behandelte.

In ganz hervorragender Weise zeigt sich Vieta's analytischer Scharfsinn in der Verwendung der in jenen Theoremen niedergelegten Gedanken zur erstmaligen Inangriffnahme und fast vollständigen Erledigung des Teilungsproblemes der trigonometrischen Funktionen. Diese Aufgabe ist in Beispielen, die die Drei-, Fünf- und Siebenteilung behandeln, so dargestellt, dafs sie sich unmittelbar auf beliebige Primzahlen ausdehnen läfst. Man erkennt aus ihrer Betrachtung auf das Deutlichste den Weg, den Vieta später (1594) einschlug, um eine von Adrianus Romanus gestellte Aufgabe zu lösen, die damals viel Aufsehen machte. Doch betrachten wir zunächst Vieta's Beispiele! Problemation I lautet: Einen gegebenen Winkel α in 3 gleiche Teile zu teilen. Man setze den Radius des Kreises $= X$, die Sehne des zu teilenden Winkels $= B$ und die Sehne des Segmentes $= E$, dann ist in seiner Schreibweise die Gleichung des Problems:

$$Xq \text{ in } E3 - Ec \text{ aequetur } Xq \text{ in } B,$$

1) Opera 300.

d. h. für $X = 1$, $E = x$, $B = a$, da q Quadrat, c Cubus ist, und die Koeffizienten nachgesetzt wurden: $3x - x^3 = a$, und Vieta findet für x folgende 2 Werte $x_1 = \text{crd}\,\frac{\alpha}{3}$, $x_2 = \text{crd}\,\frac{\alpha + 360^0}{3}$ $= \text{crd}\left(\frac{\alpha}{3} + 120^0\right)$; der dritte Wurzelwert existiert für ihn deshalb nicht, weil er die Sehne eines Winkels $> 180^0$, nämlich $\frac{\alpha}{3} + 240^0$ liefern würde. Funktionen von Winkeln $> 180^0$ wurden aber auch von Vieta noch nicht in Betracht gezogen. Erkennt man diesen geometrisch ganz gerechtfertigten Standpunkt an, so war seine Lösung eine vollständige und um so beachtenswerter, als man damals über die Mehrheit der Wurzeln einer Gleichung soviel wie nichts wufste.

Im 2. Problemation, das die Fünfteilung löst, gibt er aus seinem IX. Theorem folgernd die Gleichung $5x - 5x^3 + x^5 = a$ und findet die drei Wurzelwerte $x_1 = \text{crd}\,\frac{\alpha}{5}$, $x_2 = \text{crd}\left(\frac{\alpha}{5} + 72^0\right)$, $x_3 = \text{crd}\left(\frac{\alpha}{5} + 144^0\right)$. Die Sehnen des 4. und 5. Winkels, welche 180^0 überschreiten, existieren für ihn nicht. Hier hat es übrigens Vieta trotz seiner äufserst knappen und schwer verständlichen Darstellung doch für notwendig gefunden „für die Ungebildeten und weniger in der Analysis Erfahrenen" zu zeigen, dafs auch der Wurzelwert x_3 der aufgestellten Gleichung genügt[1]). In derselben Weise

---

1) Sein Beweis ist in Kürze folgender: Auf dem Kreis über AB (Fig. g) seien zwei ungleiche Bögen $BG = \alpha$ und $AG > BG$ so abgeschnitten, dafs

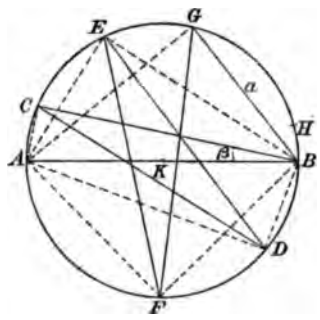


Fig. g.

$AG + BG = 180^0$ ist und $BH = \frac{\alpha}{5}$ gemacht; vermehrt man jetzt $\frac{\alpha}{5}$ um $144^0 =$ arc. HC und zieht BC, so ist zu zeigen, dafs für $BG = a$, $BC = \text{crd}\left(\frac{\alpha}{5} + 144^0\right)$ Wurzel obiger Gleichung ist. Vermehrt man arc. BC abermals um sich selbst, so dafs arc. $HCD = 2\left(\frac{\alpha}{5} + 144^0\right)$ wird und zieht CD, trägt dann von D aus in derselben Umlaufsrichtung noch dreimal $\frac{\alpha}{5} + 144^0$ auf, wodurch man zu den Punkten E, F und wieder nach G gelangt, so sieht man leicht, dafs arc. $BD = 2$ arc. AC ist; ferner ist arc. $EC =$ arc. $BD = 2$ arc. AC, also arc. $AE = 3$ arc. AC. Ähnlich ist arc. $DF =$ arc. DB, also arc. $BF = 4$ arc. AC, und da auch arc. $GE =$ arc. EC, so ist endlich arc. $GA = 5$ arc. AC. Setzt man jetzt den Radius $AK = 1$ und zur Abkürzung arc. $AC = 36^0 - \frac{\alpha}{5} = 2\beta$, so ist $\text{crd}\left(\frac{\alpha}{5} + 144^0\right) = BC = 2\cos\beta = x$. Jetzt folgt aus der Figur unter

weiter fortschreitend findet er bei der Siebenteilung 4 Wurzeln, also allgemein bei der Teilung in $2n+1$ Teile $n+1$ positive Wurzeln, wie es auch sein mufs.

Diese eingehende Kenntnis des Teilungsproblems setzte ihn nun in den Stand, jene schon erwähnte Aufgabe mit Leichtigkeit zu lösen, die der Niederländer Adrian van Roomen im Jahre 1593 „allen Mathematikern des Erdkreises" gestellt hatte[1]). Dieselbe lautete[2]): „Wenn von zwei Termen das Verhältnis des ersten zum zweiten gleich ist dem Verhältnis von x zu $45x - 3795x^3 + 95634x^5 - 1138500x^7 + 7811375x^9 - 34512075x^{11} + 105306075x^{13} - 232676280x^{15} + 384942375x^{17} - 488494125x^{19} + 483841800x^{21} - 378658800x^{23} + 236030652x^{25} - 117679100x^{27} + 46955700x^{29} - 14945040x^{31} + 3764565x^{33} - 740259x^{35} + 111150x^{37} - 12300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45}$, so soll bei gegebenem zweitem Terme der erste gesucht werden. Aufserdem fügte van Roomen noch drei spezielle Beispiele hinzu, in denen er seine Lösung angab, und verlangte endlich die Lösung der Aufgabe für den Fall, dafs der zweite Term $b = \sqrt{1\tfrac{3}{4} - \sqrt{\tfrac{5}{16}} - \sqrt{1\tfrac{7}{8} - \sqrt{\tfrac{45}{64}}}}$ ist.

Vieta[3]) zeigt nun zunächst, dafs das Problem in der vorliegenden Form „lächerlich" sei, „wenn es nicht verbessert werde", und darin hat er auch völlig recht; denn nach Angabe müfste sein: $a : b = x : (45x - 3795x^3 + \cdots + x^{45})$, wobei b als gegebene Zahl zu betrachten und a zu berechnen ist. Die Aufgabe ist also völlig unbestimmt, da man für x jeden beliebigen Wert einführen kann, um hernach a zu bestimmen[4]). Da er aber sofort aus der Bauart der Formel in x erkannte, dafs dieselbe erhalten wird, wenn man die in seinem IX. Theorem aufgestellten Ausdrücke bis zur 45. Potenz fortsetzt, so konnte er die unbestimmte Aufgabe in der Weise „verbessern", dafs er sich das Problem stellte, die Teilungsgleichung 45ten Grades

$$45x - 3795x^3 + 95634x^5 - \cdots + x^{45} = a$$

für einen gegebenen Wert von a zu lösen, wobei er sofort be-

Beachtung von Vieta's Theorem VI (S. 166) $AD = 2\cos 2\beta = x^2 - 2$, $BE = 2\cos 3\beta = x^3 - 3x$, $AF = 2\cos 4\beta = x^4 - 4x^2 + 2$, $BG = 2\cos 5\beta = x^5 - 5x^3 + 5x = a$, womit der Beweis geführt ist.

1) Ideae mathematicae pars prima sive methodus polygonorum etc. Antwerpiae 1593 in 4° am Schlusse der Einleitung. — 2) Vgl. Opera 305. — 3) Responsum ad problema quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus. Opera 305—324. Publiziert Mitte 1595, gelöst bereits im Oktober 1594, vgl. Ritter a. a. O. 28 und 29. — 4) Es scheint dies übrigens nur eine schlechte Fassung gewesen zu sein, sonst hätte er nicht in seinen Beispielen richtige Zahlenwerte für x und a angeben können.

merkte, dafs a ganz allgemein gegeben sein kann, und somit die speziellen Beispiele van Roomen's zur Lösung nichts beitragen[1]). Auch war es nur ein Weiterschreiten auf dem uns schon bekannten Wege, wenn er für x nicht nur die eine Wurzel $x_1 = 2\sin\frac{\alpha}{45}$ fand, die auch van Roomen wufste, sondern sofort alle 23 positiven Wurzelwerte erkannte, welche in der Form

$$x_m = 2\sin\left(\frac{m\cdot 360^0 + \alpha^0}{45}\right) = 2\sin\left(8^0 m + \frac{\alpha^0}{45}\right)$$

enthalten sind, wofern m die Werte 0, 1, 2 $\cdots$ 22 annimmt, und $a = 2\sin\alpha$ bedeutet. Vieta gibt sie in umgekehrter Reihenfolge in der Form $x_m = 2\sin\left(4^0 + m\,8^0 - \frac{\alpha^0}{45}\right)$ an[2]).

Nachdem er erkannt hatte, dafs die Lösung jener Gleichung das Problem der Teilung des Winkels in 45 Teile umschlofs, war die weitere Erkenntnis, dafs diese Gleichung auch successive durch zwei Dreiteilungen und eine Fünfteilung erreicht werden könne, nur eine konsequente Folgerung. So setzte er denn für den speziellen Fall von van Roomen's Aufgabe $3x - x^3 = \sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{\frac{15}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}$. Die Wurzeln x ergaben ihm dann $3y - y^3 = x$, und aus der Kenntnis von y konnte er mit der Gleichung $5z - 5z^3 + z^5 = y$ die gesuchten Wurzeln finden. Die Bedeutung des angegebenen Zahlenwertes aber war für Vieta unschwer als die Sehne der Differenz der Bögen des Sechseckes und des Zehneckes zu erkennen, also des Winkels von 24°.

Wir haben früher gesehen, dafs die Araber bereits im Besitze der Dreiteilungsgleichung der trigonometrischen Funktionen waren, die sie sich zur Berechnung von sin 1° zu verschaffen wufsten. Auch trafen wir ihre Kenntnis wieder bei Regiomontan an (S. 121, Anmerk. 1) — die Fünf- oder Mehrteilung aber hatte wohl noch Niemand vor Vieta und Adrianus Romanus an die Öffentlichkeit gebracht. Doch veranlafste den ersteren nicht nur ein theoretisches Interesse zur Verfolgung dieses wichtigen Problemes, sondern er hatte dabei auch im Auge, die Methoden zur Berechnung trigonometrischer Tabellen zu verbessern, um verlässige Resultate zu erzielen. Dies geht aus einem Korollar hervor, das er am Schlusse seiner Sätze über die Winkelteilung (p. 303) anführt und in welchem er eine Methode zur Berechnung von sin 1′ lehrt. Es ist dies folgendes Verfahren: Man verschafft sich zunächst mittels des goldenen Schnittes sin 18° und findet durch Anwendung der Fünfteilung hieraus sin 3° 36′; ferner folgt aus der Kenntnis von sin 60° durch zweimalige Anwendung

1) Opera 309. — 2) Opera 322.

der Trisektion $\sin 6^0 40'$ und durch Halbierung $\sin 3^0 20'$. Führt man die so gefundenen Werte von $\sin 3^0 36'$ und $\sin 3^0 20'$ in die Gleichung des ersten Theorems der Winkelteilung ein, so ergibt sich der Wert von $\sin(3^0 36' - 3^0 20') = \sin 16'$ und durch viermalige Halbierung der Wert von $\sin 1'$.

Freilich sagt Vieta an dieser Stelle nicht, wie er die Dreiteilungs- und die Fünfteilungsgleichung für einen gegebenen Zahlenwert löst, in seinen Zahlenbeispielen gibt er vielmehr nur solche Winkel, für welche die Sinusse ihrer Drittel, Fünftel etc. auf andere Weise gefunden werden können, aber dennoch konnte er den oben angedeuteten Weg zur Berechnung von $\sin 1'$ wirklich einschlagen, da er zur numerischen Auflösung der Gleichungen thatsächlich sowohl im Besitze der „regula falsi“ [1]) als auch eines Verfahrens war, das mit jener bekannten Methode der Araber genau übereinstimmt [2]).

Es ist hier der Platz, eine Bemerkung Vieta's anzuführen, die allerdings in das Gebiet der Anwendungen der Trigonometrie gehört, aber wegen ihrer Wichtigkeit nicht übergangen werden kann. Vieta erkannte nämlich zuerst, dafs die Behandlung des sogenannten irreduzibeln Falles der kubischen Gleichungen mit der Dreiteilung der trigonometrischen Funktionen in direkter Beziehung stehe. Denn in seiner Schrift „De recognitione aequationum“ [3]) sagt er ausdrücklich, dafs dieser Fall eleganter mittelst der Winkelschnitte gelöst werden könne und führt ihn auf die Gleichung $(2\cos\alpha)^3 - 3(2\cos\alpha) = 2\cos 3\alpha$ zurück [4]).

§ 2. Die Zyklometrie am Ende des 16. Jahrhunderts.

In enger Beziehung zu der im letzten Paragraphen entwickelten Lehre von der Winkelteilung, durch die Vieta ein ganz neues Gebiet der Goniometrie erschlossen hatte, stehen auch seine Untersuchungen über die Kreispolygone, die ihn bemerkenswerte zyklometrische Resultate finden liefsen; ja es ist sogar wahrscheinlich, dafs er erst durch sie zur allgemeineren Behandlung des Teilungsproblems geführt wurde. Er bediente sich zweier Methoden, um das Verhältnis der Kreisperipherie zum Durchmesser näherungsweise herzustellen: die eine

1) Eine Auseinandersetzung derselben gibt er bereits in seinem liber inspectionum zum Canon mathematicus p. 70. — 2) Vgl. hierüber Ritter a. a. O. 70. — 3) Theorema III. Opera 91. Montucla. Histoire des mathématiques I. 606 ff. und Cantor II. 583 haben bereits hierauf aufmerksam gemacht. — 4) Indem er in der kubischen Gleichung $A^3 - 3AB^2 = DB^2$, wo $B > \frac{D}{2}$ sein mufs, $\frac{A}{B} = 2\cos\alpha$ und $\frac{D}{B} = 2\cos 3\alpha$ setzt, a. a. O. 91.

ist die alte Methode Archimed's, die andere ging nach seiner eigenen Aussage von einem Gedanken Antiphon's[1]), eines Zeitgenossen des Sokrates aus, und soll hier kurz auseinandergesetzt werden[2]).

Vieta beweist zunächst den Satz: „Wenn man in einen Kreis zwei reguläre Polygone einschreibt, von denen das zweite die doppelte Seitenzahl des ersten hat, so verhält sich die Fläche des ersten zu der des zweiten, wie die Supplementarsehne der Seite des ersten (Apotome) zum Durchmesser. Bezeichnen F_n und F_{2n} die Flächen der beiden Polygone und a_n die zu F_n gehörige Supplementarsehne, r_n den Radius, so hat man also[3]) $F_n : F_{2n} = a_n : 2r$. Verdoppelt man nun fortgesetzt die Seitenzahl der regulären Polygone, so nähert sich die Polygonsfläche immer mehr dem Kreis an und man bekommt: $F_n : F_{2n} = (a_n \cdot a_{2n} \cdot a_{2^2n} \cdots a_{2^{k-1}n}) : (2r)^k$.

Vieta gibt den Prozefs in Worten bis zu $k = 6$ an und fügt bei: „Et eo in infinitum continuo progressu". In einem Korollar geht er nun von $n = 4$ aus. D. g.:

$$F_4 : F_{2^{k+2}} = (a_4 \cdot a_8 \cdot a_{16} \cdots a_{2^{k+1}}) : (2r)^k,$$

oder da $F_4 = 2r^2$ ist,

$$F_{2^{k+2}} = 2r^2 \cdot \frac{2r}{a_4} \cdot \frac{2r}{a_8} \cdot \frac{2r}{a_{16}} \cdots \frac{2r}{a_{2^{k+1}}}.$$

Wächst k ins Unendliche, so fällt $F_{2^{k+2}}$ näherungsweise mit der Kreisfläche zusammen, und man hat für diese den Wert

$$2r^2 \cdot \frac{2r}{a_4} \cdot \frac{2r}{a_8} \cdot \frac{2r}{a_{16}} \cdots \text{ in infinitum,}$$

oder hieraus, da für $r = 1$, die Werte $\frac{a_4}{2r} = \cos\frac{90^0}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$,

$\frac{a_8}{2r} = \cos\frac{90^0}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$, $\frac{a_{16}}{2r} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$ u. s. w. sind,

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots [4]).$$

Cantor hat schon bemerkt, dafs dieses die erste unendliche Faktoren-

1) Cantor I. 2. Aufl. 189—190. — 2) Cantor hat II. 547—548 bereits das Wichtigste hierüber mitgeteilt. Beide Methoden sind von Vieta in dem Buche Variorum de rebus mathematicis responsorum angeführt. Opera 398—400. — 3) Vgl. diese Darstellung bei Cantor II. 548. — Das Schlufsresultat hat später Giuseppe Zacchini Leonelli selbständig wiedergefunden und hielt es für neu. Bulletino di bibliogr. e di storia XVIII. 661. von Boncompagni aus L. Nachlafs veröffentlicht. — 4) Klügel, Math. Wörterbuch II. 607 hat darauf aufmerksam gemacht, dafs in Vieta's Formeln die Werte $\frac{1}{2}$ vor den Wurzeln fehlen.

folge war, welche aufgestellt wurde, und Rudio hat ihre Konvergenz bewiesen[1]).

Ob Vieta sich auch dieser Methode zur wirklichen Berechnung von π bediente, ist nicht zu ersehen, jedenfalls hat er aber schon in seinem Anhang zum „Canon mathematicus" die Ludolphische Zahl auf 10 Dezimalen[2]) richtig angegeben und sein Resultat ausdrücklich nur als eine Annäherung bezeichnet.

Es dürfte hier der Platz sein, die zusammenhängende Schilderung von Vieta's Verdiensten um unsere Wissenschaft zu unterbrechen und einen kurzen Blick auf jene Bestrebungen zu werfen, die damals von verschiedenen Seiten einer genaueren Bestimmung der Zahl π gewidmet wurden. Obgleich Nonius seiner Zeit die von Orontius Finaeus und Bouvelles verteidigte Ansicht, dafs eine exakte Quadratur des Kreises möglich sei, aufs schärfste angegriffen hatte, fand diese Ansicht doch an Simon Duchesne aus Dôles in Frankreich einen neuen Vertreter, indem derselbe zweimal, 1583 und 1586 den Versuch einer exakten Kreismessung machte. Gegen ihn wandte sich, da er das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser zu $3\frac{69}{484} = 3{,}14256198\cdots$ angegeben hatte, zuerst Ludolph van Ceulen in einer Schrift von 1585, worauf van der Eycke (Duchesne) 1586 den Wert $\pi = \sqrt{\sqrt{300} - 8} = 3{,}1446055\cdots$ als Verbesserung angab und den Umstand, dafs dieser nicht einmal zwischen den Archimedischen Grenzen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ lag, einfach dahin erklärte, dafs die Rechnung des letzteren falsch sei. Trotz dieser gewagten Behauptung reproduzierte der Mathematiker Raymarus Ursus Duchesne's Rechnung in seinem Fundamentum astronomicum 1588 und erklärte sie als ein „divinum artificium". Dem entgegen publizierte Adrianus Romanus[3]) seine „Ideae mathematicae pars prima" 1593, die er dem berühmten Jesuiten Christoph Clavius widmete. Dieses Schriftchen beschäftigt sich ausschliefslich mit Vielecksberechnungen

1) Zeitschr. f. Math. und Phys. XXXVI, hist. litt. Abteil. 139—140. — 2) Universalium inspectionum ad Canonem mathematicum liber singularis p. 15. Er ging bei seiner Rechnung nach der Methode des Archimedes vom ein- und umgeschriebenen Dreieck aus und setzte sie bis zum 393216-Eck fort. Sein Resultat schrieb er $314{,}159\frac{265\cdot 36}{}$, indem er hier zum erstenmale eine Bezeichnung der Dezimalbrüche durch Weglassung des Nenners unter dem Bruchstrich einführte, deren Wert er vollkommen erkannte. Vgl. ebenda p. 17. — 3) Geboren zu Löwen 1561 wurde er 1586 daselbst Professor der Mathematik, kam dann in der gleichen Eigenschaft nach Würzburg, besuchte von hier aus 1597 Vieta in Tours, mit dem er eine lebhafte Freundschaft schlofs, ging dann wieder in seine Heimat zurück, erschien aber 1606 abermals in Würzburg und starb 1615 zu Mainz. Genaueres bei Cantor II. 550—551 und Quetelet, Histoire des mathématiques chez les Belges. Bruxelles 1864. 8°. 132—138.

und gehört somit nur indirekt in den Kreis unserer Betrachtungen. In der Einleitung stellte er, wie wir schon wissen, das Problem der 45-Teilung, und man sieht hieraus, dafs er durch seine Untersuchungen über Polygone und die Kreismessung zum Teilungsproblem geführt wurde, das er mit Ausschlufs der Angabe mehrerer Wurzelwerte wohl ebenso gut, wie Vieta zu lösen verstand. Dann berechnet er π mit der Methode des Archimedes, indem er bis zum ein- und umgeschriebenen 251658240-Eck[1]) vorschreitet und findet $\pi = 3{,}141592653589793|1$, also auf 15 Dezimalen genau. Aufser diesem Resultate bietet das Schriftchen wenig Interesse, da es wohl eine enorme Rechengewandtheit, Geduld und Ausdauer bei der Bestimmung aller möglichen Polygonsseiten, aber keine orginelle Methode aufweist[2]).

Die vorzüglichen Leistungen Vieta's und van Roomen's in der Kreismessung konnten jedoch nicht verhindern, dafs Joseph Scaliger (1540—1609), der sich durch ebenso grofse Eitelkeit, als hervorragende litterarische und historische Kenntnisse auszeichnete und erst kürzlich (1583) ein bedeutendes Werk über Chronologie geschrieben hatte, von Neuem behauptete, dafs eine exakte Quadratur möglich sei, und für π zuerst den (indischen) Wert $\sqrt{10}$[3]) und dann den Wert $\sqrt{9{,}72}$[4]) mitteilte. Wie unglücklich seine Rechnungen nach dieser Richtung waren, beweist der Umstand, dafs er kaltblütig das von ihm gefundene Resultat, der Umfang des umschriebenen Zwölfeckes sei kleiner als der Kreisumfang, als richtig hinstellte[5]). Durch diese widersinnige Behauptung entfesselte er einen Sturm von Gegenschriften[6]), die ihn aufs schärfste angriffen. Jean Errard de Barleduc[7]), Ludolph van Ceulen[8]), Clavius[9]), Vieta[10]) und van Roomen[11]), der Italiener Pietro Antonio Cataldi[12])

---

1) Diese Zahl ist gleich $3 \cdot 5 \cdot 2^{24}$, woraus folgt, dafs er bei seiner Berechnung vom 15-Eck ausging. — 2) Er berechnet für den Radius 10^{10} die Seiten der regulären Polygone von 3, 4, 5 und 15 Ecken und die durch fortgesetzte Verdoppelung aus ihnen abgeleiteten, um eben zu dem obigen Resultate zu gelangen. — 3) Cyclometrica elementa. 1593 I. Buch — 4) Ebenda II. Buch. — 5) Vgl. hierüber Kästner, Geschichte der Mathematik I. 487—497. — 6) Vgl. Cantor II. 549. — 7) Lebte von 1566—1623 und schrieb eine Refutation. — 8) Er wandte sich direkt an Scaliger, um ihn zur Zurückziehung seines Werkes zu bewegen. — 9) Clavius, Refutatio Cyclometriae Scaligeri. 1609 in 4°. — 10) Vietaei opera Munimen adversus nova cyclometrica seu ἀντιπελεκυς. 1594. Ernst und Spott finden sich hier vereint. Die Geschichte des dieser Publikation vorausgehenden Streites mit Scaliger siehe bei Ritter a. a. O. 24—25. — 11) In Archimedis circuli dimensionem expositio et analysis. Wurceburgi 1597 in 2°. Hierüber Kästner a. a. O. I. 504—511. — 12) Difesa di Archimede delle oppositione del Sig. Gioseppe Scaligero intorno alla quadratura

und der Heidelberger Professor Jakob Christmann[1]) erhoben sich gegen ihn, ohne ihn jedoch zu bekehren. Aber ihre Schriften hatten das eine Gute, dafs die Ansicht von der Unmöglichkeit einer exakten Quadratur dem gebildeten Mathematiker immer mehr zur Gewifsheit wurde, wenn es auch noch Jahrhunderte dauern sollte, bis ein Beweis hierfür geliefert werden konnte.

Zur Ausbildung dieser Anschauung haben namentlich die Niederländer beigetragen, die mit der ihrem Stamme eigentümlichen Zähigkeit und Ausdauer sich den mühsamen und langweiligen Rechnungen zur näherungsweisen Bestimmung der Zahl π unterzogen. Insbesondere warf sich Ludolph van Ceulen (1540—1610) mit aller Kraft auf das Problem und veröffentlichte 1596 sein Werk „Van den Circkel", das noch einmal 1615 und in einer Übersetzung ins Lateinische, die Willebrord Snellius besorgte, 1619 erschien. Er berechnete π zuerst auf 20, dann auf 35 Stellen, immer jedoch sich der alten Methode bedienend. In seiner letzten Druckschrift gab er übrigens nur 32 Dezimalen bekannt, die noch fehlenden drei fanden sich auf seiner Grabschrift und rühren ebenfalls von ihm her[2]). Eine bequeme Form für π gab etwas später Adriaen Metius (1571—1635) in seiner „Arithmetica et Geometria" 1625, indem er in den von seinem Vater Adriaen Anthonisz (1527—1607) gegebenen Grenzwerten $3\frac{15}{106} < \pi < 3\frac{17}{120}$ Zähler und Nenner addierte; damit erhielt er $3\frac{32}{226} = \frac{355}{113} = 3{,}141592|9\cdots$; jedoch ist die Richtigkeit dieses Resultates als rein zufällig zu betrachten.

Zum Schlusse dieser gedrängten Mitteilungen über die Kreismessung wollen wir in der Zeit etwas vorgreifend, um später nicht mehr darauf zurückkommen zu müssen, eine Arbeit etwas näher ins Auge fassen, die sich von der ausgetretenen Bahn der Archimedischen Methode abgehend trigonometrischer Überlegungen bediente. Es ist dies eine Schrift von Philipp Lansberg, der uns später noch begegnen wird, welche den Titel führt „Cyclometriae novae libri duo". Middelburgi 1616 in 4°. Lansberg teilt einen Quadranten BD in $2n$ gleiche Teile, ein solcher Teil sei $x = \frac{90^0}{2n} = \frac{45^0}{n} = \text{arc. } CD$ (Fig. 42). Wird dann

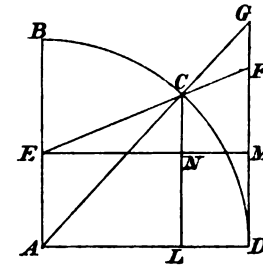


Fig. 42.

del cerchio con l'esame del Divinum inventum di N. Raymaro. Bologna 1620 in 2.

1) Tractatio geometrica de quadratura circuli in decem capita distributa adversum errores tam veterum quam recentiorum mechanicorum scripta a M. Jacobo Christmanno. Frankf. 1595. 4°. — 2) Siehe Cantor II. 552.

der Radius $AB = r$ ebenfalls in $2n$ gleiche Teile geteilt, und der Endpunkt E des ersten Teiles mit dem des entsprechenden Quadrantenteiles C verbunden, so schneidet die Verbindungslinie auf der im Endpunkte D des anderen Quadrantenradius errichteten Tangente eine Strecke DF ab, die näherungsweise gleich dem Bogen CD gesetzt werden kann. Durch Wiederholung der Teilung erhält man immer kleinere Bögen, für die das Theorem um so genauer gilt, je kleiner sie sind. Kennt man nun Sinus und Cosinus des Bogens x, so kann man hieraus π in folgender Weise finden. Man fällt $CL \perp AD$, zieht $EM \parallel AD$, das CL in N schneidet und hat dann: $CL = r \sin x$, $AL = EN = r \cos x$, $CN = CL - LN = r \sin x - \frac{r}{2n} = \frac{r}{2n}(2n \sin x - 1)$, dann folgt:

$$EN : CN = EM : MF \quad \text{oder} \quad MF = (2n \sin x - 1) : \cos x$$

und somit

$$\text{arc.}DC = DF = \frac{x\pi}{180^0} \cdot r = MF + LN = \frac{r}{2n \cos x}(2n \sin x + \cos x - 1),$$

woraus π gefunden werden kann. Indem Lansberg zunächst $n = 256$ setzt, erhält er π auf 6 Dezimalen genau und mit Fortsetzung der Halbierung konnte er die Annäherung bis auf 28 Dezimalen treiben. Er scheint auf diese Methode durch die Quadratrix der Alten gekommen zu sein, denn er erläutert den innigen Zusammenhang derselben mit seinem Verfahren. Wir werden später sehen, daſs sich Willebrord Snellius einer ähnlichen Methode zur Berechnung von π bediente, wollen aber hier unsere Schilderung der hauptsächlichsten Leistungen im Gebiete der Kreismessung abschlieſsen, um uns wieder zu Vieta zurückzuwenden und seine bahnbrechenden Neuerungen in der ebenen und sphärischen Trigonometrie einer eingehenden Betrachtung zu unterziehen.

§ 3. Vieta als Reformator der Trigonometrie.

Schon im Canon mathematicus von 1579 findet sich p. 19 eine tabellarische Zusammenstellung der Funktionsbeziehungen im ebenen bei C rechtwinkligen Dreieck ABC, die folgende 6 Sätze enthält:

$$\sin A : a = \sin B : b, \quad \text{tg } A : c = \sin A : b, \quad \text{tg } B : c = \sin B : a,$$
$$\sec B : c = \text{tg } B : b, \quad \sec A : c = \text{tg } A : a, \quad \sec A : a = \sec B : b\ ^1).$$

1) Wir schreiben hier und im Folgenden statt der Seiten AB, BC, CA bei Vieta c, a, b. In dem Werke von 1593 ist diesen wichtigen Beziehungen noch eine Menge von Relationen beigefügt, die sich ergeben, wenn man irgend eine Seite des Dreieckes gleich einer der 6 Funktionen setzt und die beiden andern daraus berechnet.

Hierauf folgt die Behandlung schiefwinkliger ebener Dreiecke, die (p. 23) naturgemäfs mit dem Sinussatze beginnt, nach dessen Aufstellung in der Form $\sin A : a = \sin B : b = \sin C : c$ es heifst: „Ex inscriptione Trianguli in Circulo". Hiermit ist offenbar der Beweis gemeint, welcher aus der schon früher angemerkten Beziehung $c = AB = 2\sin\frac{AOB}{2} = 2\sin C$ folgt[1]), wenn mit O der Mittelpunkt des Kreises bezeichnet wird. In seinem Werke von 1593 fügt Vieta dem Sinussatze noch einen zweiten an, der hier erstmalig auftritt und durch die Proportion gegeben wird:

$$a : \left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right) = b : \left(\operatorname{ctg}\frac{C}{2} + \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right) = c : \left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right).$$

Die Ableitung der Formel, die er übergeht, folgt leicht aus dem eingeschriebenen Kreise. Bezüglich des Cosinussatzes ist Folgendes zu bemerken. Im Anhange zum Kanon tritt derselbe in der zwei Gleichungen erfordernden Form auf, die schon Ptolemäus und seine Nachfolger gaben. Doch zeigt sich gegenüber der Behandlungsweise dieser insofern ein bemerkenswerter Fortschritt, als (p. 33) der zur Berechnung der Segmente, welche die Dreieckshöhe auf der Basis bildet, nötige erweiterte Pythagoräische Lehrsatz in der bequemen Analogie ausgesprochen wird: „Wie sich die Basis zur Summe der beiden Schenkel verhält, so verhält sich die Differenz der letzteren zur Differenz der Segmente der ersteren." Diese Analogie wird unmittelbar aus der Figur abgelesen, in welcher die Proportion gilt (Fig. 43): $BC : BF = BG : BD$, oder $a : c + b = c - b : BE - CE$[2]).

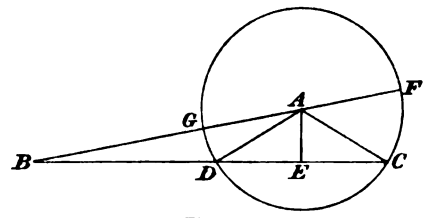


Fig. 43.

Das Übrige unterscheidet sich dann nicht von dem früheren Gebrauche. In seinem späteren Werke aber erhebt sich Vieta sogar dazu, den Cosinussatz zum erstenmale in einer einzigen Gleichung darzustellen, die in unserer Formelschreibweise lautet:

$$2bc : (b^2 + c^2 - a^2) = 1 : \cos A^3).$$

1) Dieser selbe Beweis findet sich wiederholt in späteren Schriften, so bei Rhaeticus, bei Pitiscus, wenig verändert bei Snellius, bei Gellibrand und bei Cavalieri. — 2) Also findet sich dieser Satz nicht erst bei P. Crüger, wie Wolf glaubt, H. A. I. 479. c. — 3) Variorum de rebus math. respons. Opera. 402. Wortlaut: „Ut duplum rectangulum sub cruribus ad differentiam inter quadrata crurum simul juncta et quadratum basis, ita sinus totus ad sinum complementi anguli ad verticem."

Hieran schliefst sich die Angabe des Tangentensatzes und zwar genau in dem heute noch gebräuchlichen Wortlaut, der durch die Gleichung $c + b : c - b = \operatorname{tg} \frac{C+B}{2} : \operatorname{tg} \frac{C-B}{2}$ [1]) dargestellt wird. In dieser eleganten Form tritt der Satz hier zum erstenmale auf[2]), während er in weit komplizierterer Gestalt bereits 10 Jahre früher von Thomas Fink gebracht wurde, dem man seine Entdeckung schon immer mit Recht zugeschrieben hat.

In derselben Nummer teilt Vieta noch einen anderen Satz mit, der auch hier zum erstenmal publiziert wurde, obwohl wir ihn in der von Tycho Brahe handschriftlich hinterlassenen Schrift über die Dreiecke, die zwischen 1591 und 1595 abgefafst worden war, wieder begegnen werden. Zweifelsohne hat ihn Vieta selbst entwickelt, denn Tycho's Aufzeichnungen wurden niemals bekannt gegeben. Derselbe wird folgendermafsen durch 2 Gleichungen ausgedrückt: $c : a = \operatorname{cosec} B : x$ und $x \mp \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} C$, wo das obere Zeichen für $B < 90^0$, das untere für $B > 90^0$ gilt. Vereinigt man diese beiden Gleichungen, so erhält man die bekannte Relation:

$$\operatorname{tg} C = \frac{c \sin B}{a - c \cos B}.$$

Damit hoffen wir gezeigt zu haben, wie die ebene Trigonometrie durch Vieta's geometrische Gewandtheit bereichert und zu einem selbständigen System umgeschaffen wurde, in welchem die sämtlichen trigonometrischen Funktionen gleichmäfsig zur Geltung kamen. Wir wollen aber hierbei nicht unterlassen, noch einmal darauf hinzuweisen, dafs seine Arbeiten in Rhaeticus' Kanon nicht nur ihre Veranlassung, sondern in den von diesem gegebenen Gedanken ihr Fundament fanden.

Nicht weniger bemerkenswert ist seine Umgestaltung der sphärischen Trigonometrie, denn schon in seinem Kanon behandelt er das rechtwinklige Dreieck mit einer Vollständigkeit, wie es seit Nasîr Eddîn's Zeiten nicht mehr dagewesen. In drei Tabellen gibt er eine übersichtliche Zusammenstellung aller überhaupt möglichen Gleichungen im rechtwinkligen Dreieck, indem er diejenigen 10 Relationen zugrunde legt, die wir heute aus der sogenannten Neper'schen Regel ableiten. Wohl hatte Rhaeticus, wie wir sahen (S. 148), dieselben bereits 1551 gefunden, und vielleicht wurde Vieta durch seine Andeutungen hierüber zur Aufsuchung derselben veranlafst, aber die Priorität der Publikation kommt ihm jedenfalls zu, und überdies wufste sie Rhaeticus keineswegs so übersichtlich

1) Opera 402. Nr. VI. — 2) Also nicht erst bei P. Crüger, wie Wolf. H. A. I. 179 angibt.

darzustellen, wie der grofse französische Mathematiker. Wir geben die Tabelle[1]) der 10 Formeln in Vieta's Schreibweise wieder:

Decadio I^ae.

	Pentas prima.					Pentas secunda.			
	Totus	Sinus	Sinus	Sinus		Totus	Foecund.	Foecund.	Sinus
I.	C	AB	A	CB	VI.	C	AC	$\not B$	CB
II.	C	AB	B	AC	VII.	C	CB	$\not A$	AC
III.	C	$\not A\not C$	A	$\not B$	VIII.	C	$\not A\not B$	CB	$\not B$
IV.	C	$\not C\not B$	B	$\not A$	IX.	C	$\not A\not B$	AC	$\not A$
V.	C	$\not A\not C$	$\not C\not B$	$\not A\not B$	X.	C	$\not B$	$\not A$	$\not A\not B$

Diese 10 Formeln geben in unserer Bezeichnung, da $\sphericalangle C = 90^0$, also $\sin C = \text{sin. tot.} = 1$ ist, direkt:

I. $1 : \sin AB = \sin A : \sin CB$;
II. $1 : \sin AB = \sin B : \sin AC$;
III. $1 : \cos AC = \sin A : \cos B$;
IV. $1 : \cos CB = \sin B : \cos A$;
V. $1 : \cos AC = \cos CB : \cos AB$;
VI. $1 : \operatorname{tg} AC = \operatorname{ctg} B : \sin CB$;
VII. $1 : \operatorname{tg} CB = \operatorname{ctg} A : \sin AC$;
VIII. $1 : \operatorname{ctg} AB = \operatorname{tg} CB : \cos B$;
IX. $1 : \operatorname{ctg} AB = \operatorname{tg} AC : \cos A$;
X. $1 : \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} A : \cos AB$.

Da die Formeln I und II gleichbedeutend mit unserer Fundamentalformel (I) S. 25), III und IV mit der Relation (V) von Geber, V mit der Fundamentalformel (III), VI und VII mit Relation (II), VIII und IX mit Formel (IV) und endlich X mit Relation (VI) identisch sind, so sehen wir, dafs die von Vieta gegebene Tabelle zum erstenmale im Abendlande sämtliche 6 Grundformeln des rechtwinkligen sphärischen Dreieckes bringt und zwar in einer bequemen, übersichtlichen Form, die sich unmittelbar in die heute gebräuchliche umsetzen läfst.

Die von uns mitgeteilte Übersicht umschliefst jedoch nur den sechsten Teil der von ihm in dieser Tabelle aufgestellten Gleichungen. Löst man nämlich jede unserer 10 Formeln nach einem der beiden Mittelglieder auf und formt das Resultat so um, dafs kein Quotient auftritt, so erhält man weitere 20 Formeln, aus denen man in Verbindung mit den 10 ersten abermals 30 ableitet, indem man sin.

1) Canon math. Anhang 36. Die Durchstreichung der Gröfsen in dieser Tabelle bedeutet, dafs an Stelle der darüberstehenden Funktionen die Cofunktionen zu nehmen sind.

und cosin. respektive in cosec. und sec. und die Tangenten in Cotangenten umschreibt. Auf diese Weise lassen sich also Quotienten stets vermeiden[1]).

In ähnlicher Weise gibt er in einer zweiten Tabelle (p. 40) abermals 10 Relationen an, die zwischen je vier Stücken des Dreieckes stattfinden und leitet aus ihnen, wie oben, im Ganzen 60 solche Beziehungen her, unter denen sich aber, wie schon Delambre bemerkte[2]), 10 Identitäten befinden. Da dieselben von geringerer praktischer Bedeutung sind, so gehen wir hier nicht weiter auf sie ein. — In dem späteren Werke von 1593 zeigt sich gegenüber den Angaben des Canon mathematicus kein weiterer Fortschritt mehr, denn aufserdem dafs Vieta die Tafeln aus diesem wieder zum Abdruck bringt und noch einige anhängt, die zeigen, welche Analogien bei Behandlung der Hauptaufgaben der Dreieckslehre zu verwenden sind, hebt er aus den 60 Formeln der ersten Tabelle 21 heraus, die besonders nützlich sein sollen, und gibt sie in Worten an[3]). Wir wissen, dafs 6 oder 10 auch schon genügt hätten! Übrigens sind diese wichtigen Formelsysteme weder im Kanon, noch später abgeleitet, nur findet sich in ersterem eine Bemerkung[4]), die darauf hinzudeuten scheint, dafs er seine Sätze durch Betrachtung des zum Kugeldreieck gehörigen Dreikantes erhielt, und in dem spätern Werke wird gezeigt[5]), wie man die sphärischen Dreiecke auf die Betrachtung ebener zurückführen kann.

Auch in der Behandlung der schiefwinkligen sphärischen Dreiecke war Vieta's Thätigkeit bahnbrechend. Wenn er auch im Kanon noch in keiner Weise über Regiomontan hinausgeht, indem er sich nur der Zerspaltung in zwei rechtwinklige Dreiecke oder des Sinus- und des Cosinussatzes, des letzteren in Regiomontan's Fassung, bedient[6]), so bietet dagegen seine spätere trigonometrische Schrift viel Neues. Ein Teil der in ihr gegebenen Sätze erscheint hier teilweise überhaupt, teilweise in der vorliegenden Formulierung zum erstenmale, und gerade die Präzision der letzteren, sowie die systematische Anordnung der Lehrsätze nach dem Prinzip

---

1) So bekommt man z. B. aus Formel I folgende sechs: $1 : \sin c = \sin A : \sin a$; $1 : \sin a = \operatorname{cosec} c : \sin A$; $1 : \sin a = \operatorname{cosec} A : \sin c$ und $1 : \operatorname{cosec} A = \operatorname{cosec} c : \operatorname{cosec} a$; $1 : \operatorname{cosec} a = \sin c : \operatorname{cosec} A$; $1 : \operatorname{cosec} a = \sin A : \operatorname{cosec} c$. — 2) Hist. de l'Astr. du moyen âge 463. Wir sahen früher (S. 62), dafs schon Ibn Jûnos zwei dieser Formeln ableitete und benützte. — 3) Opera 403—406. — 4) Canon mathematicus 34. — 5) Opera 418—419. — 6) Delambre's Bemerkung, er gebe eine neue Lösung der Aufgabe, aus den Seiten die Winkel zu finden, ist unrichtig, denn jene Lösung stimmt genau mit der zweiten Regiomontan's überein.

der reziproken Beziehung übertrifft alles bisher Dagewesene. Schon das ist ein Fingerzeig dafür, dafs Vieta die Wichtigkeit der Reziprozität sehr wohl kannte, aber er kannte zweifelsohne die Eigenschaften des reziproken Dreiecks vollständig, indem er stets zwei reziproke Aufgaben genau mit den reziproken Formeln löste[1]).

Er unterscheidet im ganzen 8 Fälle, von denen die ersten zwei lauten: „Aus den drei Seiten die Winkel und aus den drei Winkeln die Seiten zu berechnen."

Bei Lösung der ersteren Aufgabe tritt endlich einmal der Cosinussatz, von dem Sinus versus Regiomontan's befreit, in der uns geläufigen Form auf:

$$(\sin a \cdot \sin b) : (\cos c \mp \cos a \cos b) = 1 : \cos C^{2}).$$

Die Veränderungen, denen diese Formel ausgesetzt ist, jenachdem $c \lesseqgtr 90^0$ und a und b gleichartig oder ungleichartig sind, werden hier, wie in allen folgenden Fällen, kurz und bündig angegeben. Interessant ist auch die Folgerung, die sich ihm für den Fall, dafs $a = b$ ist, ergibt; er erhält dann: $1 : \sin a = \operatorname{cosec} \frac{c}{2} : \operatorname{cosec} \frac{C}{2}$, eine Formel, die er doch wohl nur mit einigen rechnerischen Umformungen der Hauptformel gewonnen haben dürfte.

Die Lösung der polarreziproken Aufgabe wird mit der entsprechenden Formel

$$(\sin A \cdot \sin B) : (\cos A \cos B \pm \cos C) = 1 : \cos c^{3})$$

ausgeführt. In dieser Gestalt konnten wir dieselbe an keiner früheren Stelle finden, müssen sie also Vieta zuschreiben; allerdings werden wir sehen, dafs der Satz in Gestalt zweier Analogien sich bereits in einem 1591 erschienenen Werke von Philipp Lansberg und wieder in anderer Form in dem schon einmal erwähnten Manuskript Tycho's findet. — Auch bei dieser Aufgabe hat Vieta den Fall $A = B$ eigens angemerkt und hierfür die Formel: $1 : \sin A = \sec \frac{C}{2} : \sec \frac{c}{2}$ gegeben, die wieder reziprok zur obigen ist.

Ebenfalls zum erstenmale tritt ferner bei Behandlung der nächsten zwei Aufgaben der dritte Hauptsatz der sphärischen Trigonometrie und sein reziproker auf. Es handelt sich nämlich darum, „aus zwei Seiten (b und c) und dem eingeschlossenen Winkel (A) einen zweiten Winkel (C) und aus zwei Winkeln (B und C) und der zwischenliegenden Seite (a) eine

1) Opera p. 407—411. — 2) Ebenda 407. Nr. XV. — 3) Ebenda 407—408. Nr. XVI.

zweite Seite (c) zu suchen“[1]). Hierzu gibt er die beiden reziprok-polaren Sätze:

$$(\sin A \operatorname{cosec} b) : (\operatorname{ctg} c \mp \cos A \operatorname{ctg} b) = 1 : \operatorname{ctg} C,$$

$$(\sin a \operatorname{cosec} B) : (\operatorname{ctg} C \pm \cos a \operatorname{ctg} B) = 1 : \operatorname{ctg} c,$$

und für den Fall daſs $b = c$, bezüglich $B = C$ ist, die Formeln:

$$1 : \sec c = \operatorname{ctg} \tfrac{A}{2} : \operatorname{ctg} C \quad \text{und} \quad 1 : \sec C = \operatorname{tg} \tfrac{a}{2} : \operatorname{ctg} c.$$

Weiter folgt die Behandlung der beiden Aufgaben, „aus den gleichen Angaben, wie vorhin, die dritte Seite, respektive den dritten Winkel direkt zu berechnen“. Hierzu bedient er sich aber merkwürdiger Weise nicht direkt der beiden Cosinussätze, sondern gibt die, wenigstens in dieser Gestalt, wiederum neuen Formeln[2]):

$$(\operatorname{cosec} b \operatorname{cosec} c) : (\cos A \pm \operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c) = 1 : \cos a,$$

$$(\operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C) : (\cos a \mp \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C) = 1 : \cos A,$$

welche sich allerdings leicht aus jenen zwei Sätzen ableiten lassen. Die beiden letzten Probleme, „aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der einen den anderen Gegenwinkel zu berechnen“, und die hierzu reziproke werden in einer Nummer XXI zusammengestellt und mit dem zu sich selbst reziproken Sinussatze gelöst.

Es ist sehr zu bedauern, daſs Vieta für keine dieser neuen Lösungen eine Ableitung[3]) angibt; aber mag er die eine Hälfte durch die stereometrische Methode des Coppernicus oder sonstwie erhalten haben, darüber wird man nach dieser Zusammenstellung der reziproken Aufgaben und Formeln wohl kaum mehr im Zweifel sein, daſs er die andere Hälfte derselben mittelst eines Prinzipes gewann, das die direkte Ableitung der zweiten Formelgruppe aus der ersten gestattete. In der That besaſs er ein solches Prinzip, welches er Enallage πλευρογωνίκη — Vertauschung von Seiten und Winkeln — nannte, und das nichts anderes ist, als der Übergang von einem Dreieck zu seinem Supplementardreieck oder zu einem der drei Nebendreiecke desselben. Wohl hat Vieta eine Definition dieses Dreiecks gegeben[4]), die aber so unklar gehalten ist, daſs es nicht Wunder nehmen darf, wenn sie von anderer Seite nicht auf dasselbe bezogen wurde[5]), aber die genaue Untersuchung der von ihm mitgeteilten Beispiele für seine Enallage läſst doch keinen Zweifel mehr, daſs er

1) A. a. O. 408—410. Nr. XVII und Nr. XVIII. — 2) A. a. O. 410 und 411. Nr. XIX und XX. — 3) Die Sätze selbst sind wieder in einer Tabelle, 431—432, ähnlich wie für die rechtwinkligen Dreiecke, zusammengestellt. — 4) Opera 418. Nr. IV: „Si sub apicibus singulis propositi tripleuri sphaerici, describantur maximi circuli, tripleurum ita descriptum, tripleuri primum propositi, lateribus et angulis est reciprocum.“ — 5) Delambre, Hist. de l'Astr. du moyen âge 478.

damit das Supplementardreieck meinte. Wir glauben dies in einer Note „Zur Geschichte des Supplementardreiecks“[1]) einwandsfrei nachgewiesen zu haben, auf die wir hier der Kürze halber verweisen.

Vieta bediente sich übrigens noch einer zweiten Vertauschungsmethode, die er „Inversio κατ' ἀναπλήρωσιν“[2]) nannte. Durch diese ersetzte er ein Dreieck, das einen stumpfen Winkel, oder eine Seite gröfser als ein Quadrant besafs, durch jenes seiner drei Nebendreiecke, bei denen dies nicht mehr der Fall war. Es war dies deshalb notwendig, weil er die Funktionen von Winkeln, die $> 90^0$ sind, noch nicht allgemein zu behandeln verstand.

Durch Vieta's originelle Leistungen, die das gesamte Gebiet der Trigonometrie umspannten und sogar neue Anknüpfungspunkte mit anderen mathematischen Wissensgebieten, wie mit der Algebra, darboten, waren die trigonometrischen Kenntnisse plötzlich zu einer Höhe emporgeschnellt, die selbst die Araber und Perser in ihrer glänzendsten wissenschaftlichen Periode nicht erreicht hatten. Dennoch läfst sich sein Einflufs in der zeitgenössischen Litteratur nicht, wie man meinen sollte, auf den ersten Blick erkennen. Das findet seine Begründung namentlich in zwei Umständen. Einmal sind viele seiner Resultate infolge seiner zu grofsen Sorglosigkeit und Mitteilsamkeit schon vor der Drucklegung seines Kanons in die Öffentlichkeit gedrungen[3]) und von Plagiatoren als ihr Eigentum ausgegeben worden, und dann scheinen seine Schriften nicht sofort von allen verstanden worden zu sein, was auch bei seiner dunkeln beweislosen Schreibweise, die mehr verblüffen, als lehren wollte, keineswegs zu verwundern ist.

§ 4. Maurice Bressieu und Nathaniel Torporley.

In derselben Zeit, in welcher Vieta „als mathematischer Dilletant“, wie er sich selbst nennt, die Berufsmathematiker in Staunen setzte, veröffentlichte einer dieser letzteren Mauritius Bressius[4]), oder Bressieu, der von 1576—1608 Professor an dem von Franz I. gegründeten Collège de France in Paris war, eine Schrift, die mehr

1) Bibliotheca math. 1898. 65—72. Darin haben wir auch die oben angeführten Formeln Vieta's für schiefwinklige Dreiecke zum erstenmal mitgeteilt. — 2) Opera 418. — 3) Der Verleger des Kanons, Johann Mettayer, sagt in einer kurzen Notiz für den Leser ausdrücklich, Vieta habe die Früchte seiner Studien zu freigebig anderen mitgeteilt, die sie dann mit ihren eigenen Resultaten, ohne seinen Namen zu nennen, publizierten; deshalb habe er auch nicht geruht, bis er von Vieta die Erlaubnis zur Veröffentlichung des „liber inspectionum“ (des zweiten Teiles) erhalten habe. — 4) Das Datum seiner Geburt ist unbekannt, er starb 1608.

Interesse verdient, als ihr bisher geschenkt wurde. Die „Metrices Astronomicae", so hiefs dieselbe, erschienen 1581, also drei Jahre nach dem Canon mathematicus Vieta's, den ihr Verfasser mit dem Kanon des Rhaeticus sicher benützt hat. Denn wenn die Schrift sich auch, merkwürdiger Weise so spät noch, durchweg der Sexagesimalrechnung bedient, läfst sie doch erkennen, dafs Bressius manches von seinem grofsen Zeitgenossen herübergenommen hat, allerdings ohne ihn auch nur ein einzigesmal zu nennen. Sein Hauptverdienst liegt darin, dafs er zu seinen Sätzen überall Ableitungen und Beweise gibt, die er wohl selbst erdacht hat, während er den von Rhaeticus herrührenden und von Vieta mit so vielem Geschick ausgebauten Gedanken einer gleichmäfsigen Behandlung der 6 Funktionen in seiner Wichtigkeit nicht erfafste. Gleichwohl kennt und benützt er die Tangenten (Adscriptae) und die Sekanten (Hypotenusae) und gibt Tabellen für sie, die für alle Minuten berechnet sind und zwar mit Benutzung der von Vieta angegebenen Formeln (S. 161). An diesen erinnert auch die ganz konforme Behandlung des erweiterten Pythagoräischen Theorems (S. 177).

Zum Fundamente seiner sphärischen Trigonometrie dient neben dem Satze des Menelaus die Regel der vier Gröfsen, aus der er, ganz wie Abû'l Wafâ, auch die allgemeine Gleichung $\operatorname{tg} BC : \operatorname{tg} B'C' = \sin AC : \sin AC'$ (vgl. S. 58) ableitet[1]), die hier zum erstenmale im Abendlande erscheint. Mit diesen Sätzen erhält er dann, ähnlich wie Nasîr Eddîn, die sämtlichen 6 Fundementalformeln des rechtwinkligen Dreiecks, die er merkwürdiger Weise als neu bezeichnet. Bemerkenswert ist die Figur, aus welcher er diese Relationen gewinnt, zumal da sie hier, soweit uns bekannt, an erster Stelle auftritt, während man ihr bei Rhaeticus und später noch öfter begegnet. Sie ist folgendermafsen konstruiert. Die Seiten AC und AB des bei C rechtwinkligen sphärischen Dreiecks ABC sind zu Quadranten AD und

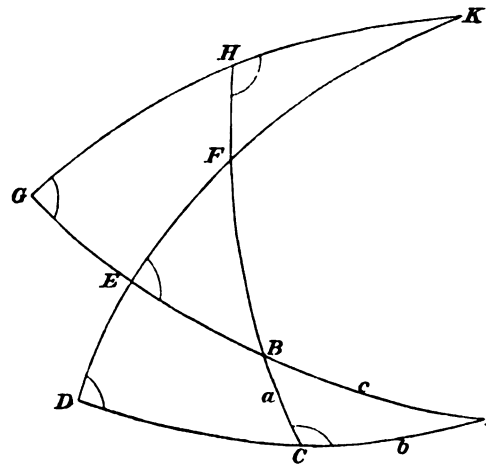


Fig. 44.

1) Metrices. Prop. 21. p. 61.

AE (Fig. 44) verlängert und D ist mit E durch einen gröfsten Kreisbogen verbunden, dann ist F der Pol von arc. AD. Macht man ferner $BG = BH = 90^0$, so ist B der Pol von arc. GHK und die Winkel bei D, E, G und H sind rechte. Diese Figur vereinigt in sich alle jene, aus denen schon Naṣîr Eddîn seine Sätze erhielt, und gestattet sofort die 6 Fundamentalrelationen direkt abzulesen, wenn man auf sie die genannten zwei Theoreme anwendet. Ist z. B. die 6. Relation $\cos c = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B$ abzuleiten[1]), so hat man, da $FE \perp BG$, $HG \perp BG$ ist: $\sin BE : \sin BG = \operatorname{tg} FE : \operatorname{tg} HG$ oder weil $FK = 90^0 - FE = ED$ ist, $\cos BA : 1 = \operatorname{ctg} ED : \operatorname{tg} B$, also $\cos c : 1 = \operatorname{ctg} A : \operatorname{tg} B$[2]).

Wir sehen daraus, dafs Bressius, wenn er auch auf den Schultern seiner Vorgänger stand, doch in der Begründung seiner Theoreme eine sehr bemerkenswerte Selbständigkeit an den Tag legte, die ihm die Schaffung eines einheitlichen Fundamentes für alle jene Formeln gestattete, die Vieta angegeben hatte.

Anders scheint es sich mit dem Engländer Nathaniel Torporley zu verhalten, welcher eine Zeit lang in enger Beziehung zu Vieta stand[3]), und dessen Schrift daher direkt durch die Lehren des grofsen Mathematikers beeinflufst scheint[4]). Sein Werk führt den auffälligen Titel: „Diclides coelometricae, seu valvae astronomicae universales, omnia artis totius munera Psephoretica in sat modicis sinibus duarum tabularum, methodo nova, generali et facillima continentes.“ 1602 in 4°. Für uns ist nur das zweite Buch desselben von Interesse[5]), da das erste astrologischen Inhalt besitzt. In demselben will er eine leicht zu behaltende und vollständige sphärische Trigonometrie geben und behandelt die Auflösung sämtlicher 6 Fälle des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, die er Triplizitäten nennt, weil jedesmal aufser dem rechten Winkel noch drei weitere Stücke in Frage kommen. Überhaupt hat er die Neigung zur Einführung neuer Bezeichnungen von seinem Lehrmeister überkommen, geht aber darin bis zur albernsten Abgeschmacktheit. Wir hätten daher kaum eine Veranlassung, Torporley zu nennen, wenn er nicht den Gedanken gehabt hätte — der übrigens vielleicht auch auf Vieta zurückzuführen ist[6]) — seine sämtlichen in zwei Gruppen getrennten

1) A. a. O. Trop. 30. p. 74. — 2) Bressius leitet übrigens aus ihr nur drei der 6 Theoreme ab, während er für die übrigen eigene Figuren zeichnet. — 3) Von seinen Lebensverhältnissen ist nur bekannt, dafs er in Oxford studierte, später mehrere Jahre bei Vieta Schreiber oder Famulus war, dann wieder nach England zurückkehrte, wo er 1632 starb. — 4) Aus diesem Grunde beschreiben wir das Werk bereits hier, obwohl es einer etwas späteren Zeit angehört. — 5) Vgl. Kästner, Geschichte III. 101—107 und Cantor II. 642. — 6) Wie wir sahen, gab Vieta schon in seinem Kanon die 6 Hauptformeln, und sein Sekretär kannte jedenfalls die Methode, mit der er sie ableitete.

6 Fälle in jener einzigen Figur zu vereinigen, die wir eben bei Bressius fanden (Fig. 44), und die er „Bischofsmütze“ (mitra) nannte. Den Kreis *CBFH* bezeichnete er als die an ihr befestigte Binde. Diese Mütze ist wiederholt gezeichnet, das einemal trägt sie ein von links, das anderemal ein von rechts gezeichneter Kopf, um die Triplizitäten anschaulich zu machen. Das Wichtigste daran aber ist der Umstand, dafs den beiden Figuren zwei Sätze entsprechen, die es ermöglichen alle 6 Triplizitäten zu lösen und die in der That nichts anderes sind, als Neper's bekannte einige Jahre später angegebene Regel[1]), die also hier zum erstenmale erscheint, wenn auch noch nicht in der praktischen und klaren Form, die ihr dieser gegeben hat. De Morgan hat darauf aufmerksam gemacht, dafs Neper aller Wahrscheinlichkeit nach Torporley's Schrift kannte und durch ihn zu seiner berühmten Regel geführt wurde, denn auch er hat das Wort „Triplizität“, das sich sonst nirgends findet, und in seinem Beweis schlägt er denselben Weg ein, den Torporley ging. Insofern hat also auch dieses verrückte Buch zur Vereinfachung der trigonometrischen Lehren beigetragen.

§ 5. Thomas Fink's Geometria rotundi und ihr Einfluſs.

Die zahlreichen neuen Gedanken, die Vieta in seinem Kanon niedergelegt hatte, waren nicht sofort auf fruchtbares Erdreich gefallen, denn er war seiner Zeit mit seinen Entdeckungen weit vorangeeilt. So kommt es denn, dafs die nächste Entwickelung unserer Wissenschaft im allgemeinen einen Weg geht, der von jenem des grofsen Mannes ziemlich weit abliegt, und auf demselben erst ganz allmählich zu den nämlichen Zielen gelangt, die jener längst überschritten hatte.

Verfolgen wir diese Entwickelung, so begegnen wir zunächst einem Manne, der dadurch viel zur Ausbildung der Trigonometrie beitrug, dafs er ein leicht lesbares und thatsächlich auch viel gelesenes Buch schrieb, welches, wenn auch auf der alten Methode des Menelaus beruhend, doch die neueren Errungenschaften eines Rhaeticus und Reinhold praktisch verwertete. Wir meinen die „Geometria rotundi“ des Thomas Fink oder Finchius[2]). Derselbe war 1561

1) De Morgan. On the invention of the Circular Parts. Philosophical Magazine. 3. Serie. Vol. 22. 1843. 350—53. Leider stand uns Torporley's Schrift selbst nicht zur Verfügung, so dafs wir uns auf die Angaben des genannten Gelehrten verlassen müssen. Kästner gibt a. a. O. kein klares Bild von der Sache. — 2) J. Mollerus, Cimbria litterata 1744. 2°. Hauniae. I. 175 und III. 249 ff.

zu Flensburg geboren, besuchte die Universitäten Jena, Wittenberg, Heidelberg und Leipzig und begab sich 1583 nach Basel, wo er noch im gleichen Jahre das genannte Werk erscheinen liefs; dasselbe ist also wesentlich aus jenen Studien erwachsen, die er in Deutschland gemacht hatte, und thatsächlich kannte er auch die neueste daselbst produzierte Litteratur sehr wohl[1]). Hierauf ging er nach Padua[2]), blieb dort bis 1587 und trat mit dem Astronomen Magini in enge Beziehung, dessen Verdienste um die Trigonometrie wir noch kennen lernen werden. In sein Vaterland zurückgekehrt, wurde er Leibarzt des Herzogs von Schleswig-Holstein und 1590 Professor für Medizin, Rhetorik und Mathematik in Kopenhagen und starb dort hochbetagt 1656. Aufser den Schriften deutscher und italienischer Gelehrter, wie des Maurolycus[3]), kannte Fink auch die Schriften des Petrus Ramus, den er besonders verehrte, und auch die Metrices des Bressius scheinen ihm nicht entgangen zu sein, da an sie manche seiner Ausführungen sehr anklingen.

Fink bediente sich der sämtlichen trigonometrischen Funktionen und führte für sie teilweise neue Namen ein. So finden sich bei ihm zum erstenmale die Bezeichnungen „Tangente" und „Sekante", die von da ab das Bürgerrecht in der Trigonometrie erhielten, während seine Benennung „sinus secundus" für „sinus versus" keine Annahme fand. Er definiert diese Funktionen aber nicht, wie Rhaeticus, durch die Seiten des rechtwinkligen Dreieckes, sondern als Linien am Kreise und leitet auch die wenigen goniometrischen Formeln[4]), die er zur Tabellenberechnung nötig hat, ähnlich wie Bressius, am Kreise ab. Die beigegebenen Tabellen, deren Berechnung nichts Originelles aufweist, umschliefsen einen Kanon der Sinusse, Tangenten und Sekanten, die für $r = 10^7$ angegeben sind und nach Minuten von 0^0 bis 90^0 fortschreiten. Seine Tafeln sind trotz des Vorganges des Rhaeticus nicht zur Ablesung der Komplementärfunktionen eingerichtet — ein entschiedener Rückschritt!

Aus seinen Sätzen zur Berechnung ebener Dreiecke erwähnen

---

1) Reinhold's Werk und den Kanon des Rhaeticus von 1551 führt er in seinem Buche selbst an: 74, 76 und 176. — 2) A. Favaro, Carteggio inedito di Ticone Brahe etc. con Gio. A. Magini. Bologna 1886. 8°. 102 ff. Wir zitieren dieses Werk künftig schlechthin mit Favaro, Carteggio. — 3) J. Mollerus a. a. O. 254 und Geometria rotundi. 76. — 4) Neu ist die Formel $\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{90^0+\alpha}{2}$, (vgl. auch Wolf, H. A. I. 170 und 173 Anmerk. f.), während die Formel: $\sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{90^0-\alpha}{2}$ bereits Bressius angab; beide gehen leicht in Vieta's Formeln (S. 161) über.

wir nur den hier erstmalig auftretenden Tangentensatz[1]), der aus folgender Überlegung gefunden wird. Es wird zuerst das alte Problem des Ptolemäus, nämlich die goniometrische Aufgabe gelöst, aus dem Verhältnis der Sinusse zweier Winkel und der Summe oder Differenz derselben die Winkel selbst zu bestimmen. Ist nämlich $\sin\alpha : \sin\beta = m : n$ gegeben, ferner in Fig. 45 arc. $AE = \alpha$, arc. $JE = \beta$, dann ist $m : n = AO : JO$; wenn dann weiter arc. $AY =$ arc. $YJ = \frac{\alpha+\beta}{2}$ bekannt ist, so hat man arc. $EY =$ arc. $YJ -$ arc. $JE = \frac{\alpha+\beta}{2} - \beta = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Ferner ist $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = AR$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = OR$ (für Radius $UR = 1$); aber $AR = \frac{AO+OJ}{2} = \frac{m+n}{2n}$, $OR = \frac{AO+OJ}{2} - OJ = \left(\frac{m+n}{2} - n\right)\frac{1}{n}$; also

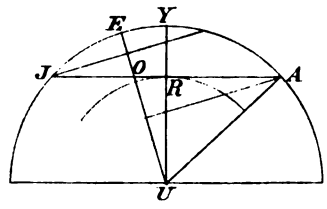


Fig. 45.

$$\frac{m+n}{2} : \frac{m+n}{2} - n = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta\right).$$

Beachtet man nun das Bestehen des Sinussatzes in einem beliebigen ebenen Dreieck mit den Seiten a und b, so ist $m : n = a : b$, also

$$\frac{a+b}{2} : \frac{a+b}{2} - b = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta\right)^{2}).$$

Der Wortlaut des Satzes, in welchem ihn Fink mitteilt, entspricht genau der von uns gegebenen Schreibweise der Formel; verwendet ward er nur zur Lösung der Aufgabe „aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die beiden anderen Winkel zu finden“. Fink löst auch nur die Grundaufgaben der ebenen Dreieckslehre, indem er bezüglich anderer Beispiele auf Regiomontan verweist, der damals noch immer in hohem Ansehen stand[3]).

Seine sphärische Trigonometrie erinnert sehr an die des Bressius: wie dieser entwickelt er aus dem Satze des Menelaus die Tangentenformel des Abû'l Wafâ[4]) und verschafft sich ebenso die sämtlichen 6 Fundamentalgleichungen des rechtwinkligen Dreieckes; ja es findet sich in seinem Buche sogar eine Figur[5]), aus welcher sich die sämtlichen Dreiecksformeln gewinnen lassen: die Bischofsmütze Torporley's, die wir zuerst bei Bressieu nachwiesen. Übrigens geht

1) Geometria rotundi 282 und 292. — 2) Wie schon mitgeteilt (S. 178), hat ihn erst Vieta 10 Jahre später in unserer heutigen eleganteren Form ausgesprochen. Über die verschiedenen Beweise, die der Satz später erfuhr, siehe Pfleiderer, Trigonometrie 361—373. — 3) Geometria rotundi 295 heifst es: Regiomontanus aliquot casus in secundo libro de triangulis collegit: quos illic videre potes. Cujus certe libri à studiosis avidi legi debent: et cum fructu legi possunt. — 4) Ebenda 369. — 5) Ebenda 362, 373, 378, 382 und 385.

er in einer Richtung über Bressieu hinaus, indem er auch den Cosinussatz für das schiefwinklige sphärische Dreieck, allerdings noch in der Form Regiomontan's, ableitet und zum erstenmale auch zur Berechnung einer Seite aus zwei Seiten und ihrem Zwischenwinkel verwendet.

Wir erwähnten schon, dafs die Geometria rotundi eine rasche Verbreitung fand, und in der That stand sie bei Fink's Zeitgenossen in hohem Ansehen. Das beweisen die Zeugnisse von Männern, wie Clavius, Maginus, Adrianus Romanus, Philipp Lansberg, Snellius und Pitiscus u. a. m., die alle in ihren Werken darauf zurückkamen und das Buch ein vorzügliches nannten[1]). Dadurch steigert sich auch unser Interesse für das Werk, das, wenn es auch nicht viel absolut Neues bot, doch so sehr dem Bedürfnisse der Zeit entgegenkam, dafs seine Einwirkung auf den Fortgang der Entwickelung unserer Wissenschaft nicht unterschätzt werden darf.

Der eben erwähnte Jesuit Christoph Clavius[2]) (1537—1602), der als einer der hervorragendsten und angesehensten Mathematiker seiner Zeit galt, veröffentlichte 1586 in Rom einen Kommentar zu den Büchern des Theodosius[3]), welchem er eine Schrift über den Sinus, die Tangenten und Sekanten anhängte, die sich bereits der von Fink vorgeschlagenen Bezeichnung bediente und in der Art der Berechnung vollständig an ihn anlehnte. Auch der Radius, nach welchem die später viel gebrauchten Tafeln dieser Schrift hergestellt sind, ist wie bei Fink 10^7, nur sind sie so eingerichtet, dafs auch die komplementären Funktionen direkt abgelesen werden können. Sieben Jahre später veröffentlichte er, wie wir gleich hier bemerken wollen, in seinem „Astrolabium“[4]) eine Sammlung von Sätzen zur Auflösung ebener und sphärischer Dreiecke, die im Zusammenhalt mit der Berechnung ebener Dreiecke im ersten Buche seiner „Geometria practica“ von 1604[5]) und mit den in der Gesamtausgabe seiner Werke von 1611 noch vermehrten „Triangula sphaerica“ eine Vereinigung

1) Mollerus a. a. O. 254. — 2) Er hiefs wahrscheinlich Schlüssel und war aus Bamberg gebürtig, lehrte aber 14 Jahre als Professor der Mathematik in Rom. — 3) Theodosii Tripolitae sphaericorum libri III. Item Sinus, Lineae tangentes, et secantes, triangula rectilinea atque sphaerica. Romae 1586. 4°. Diese Schrift kündigte er schon in der Vorrede zu seinen Gnomonices libri octo Romae 1581. 2° an, kannte aber damals die Tangenten noch nicht (vgl. daselbst S. 476 und 474). — 4) Opera Chr. Clavii. Moguntiae 1611 in fol. III. Astrolabium lib. I. — 5) Im 29. Satze des 8. Buches der praktischen Geometrie wendet er die trigonometrische Rechnung zur Aufsuchung der Winkel in dem mit fester Zirkelöffnung hergestellten Fünfeck an. Vgl. S. Günther. Die geometrischen Näherungskonstruktionen Albrecht Dürer's. Beilage zum Jahresbericht der Studienanstalt Ansbach 1885/86. p. 6.

fast aller bis daher bekannter trigonometrischer Kenntnisse einschliefslich der prosthaphäretischen Methode bieten. Diese Abhandlungen des Clavius haben infolge des bedeutenden Namens, den ihr Autor trug, sowie durch ihre klare und umfassende Darstellung jedenfalls am meisten zur Ausbreitung der neuen Kenntnisse beigetragen, wenn sie auch nur teilweise als Originalarbeiten bezeichnet werden können.

Zu den letzteren gehört eine auf der stereographischen Projektion der Kugel beruhende rein graphische Auflösung sphärischer Dreiecke, welche Clavius in dem eben erwähnten Astrolabium von 1593 gegeben hat, und die, wenn auch nur von theoretischem Standpunkte aus, Beachtung verdient. Das Astrolabium planisphaerium, welches durch stereographische Projektion der Kugel von einem Pole aus auf die Äquatorebene entsteht, und das schon Hipparch kannte[1]), wurde, wie wir wissen, von Ptolemäus in einem eigenen Buche beschrieben, das mit seinen übrigen Schriften den Arabern bekannt ward. Diese benützten es mit grofser Vorliebe zu astronomischen Zwecken und lösten so implizite damit die sphärischen Dreiecke. Auch im Abendlande wurde die Schrift des Ptolemäus namentlich durch eine Übersetzung Rudolfs von Brügge aus dem Arabischen um die Mitte des 12. Jahrhunderts bekannt, aber erst durch die 1558 von F. Commandinus mit einem Kommentar versehene Ausgabe weiter verbreitet. Diese letztere veranlafste auch Clavius, sich mit dem Studium des Astrolabiums näher zu beschäftigen, wobei er auf den Gedanken kam, die zu seiner Herstellung nötigen geometrischen Konstruktionen, ähnlich wie die Orthogonalprojektion des Analemmas, zur graphischen Auflösung sphärischer Dreiecke zu benützen[2]).

Seine Anwendung stützt sich hauptsächlich auf folgende 4 Konstruktionen: Durch stereographische Projektion 1) einen Hauptkreis zu ziehen, welcher durch einen gegebenen Durchmesser geht und mit der Zeichnungsebene einen gegebenen Winkel einschliefst; 2) zu einem gegebenen Hauptkreis einen Parallelkreis von gegebener Poldistanz zu zeichnen; 3) zu einem gegebenen Punkt seinen Gegenpunkt zu konstruieren und 4) die Pole eines gegebenen Haupt-

1) Vgl. S. 11 Anmerk. 5. — 2) Seine Anwendungen sind im 3. Buche des Astrolabiums durchgeführt. Herr Haller hatte die Güte, für mich die entsprechenden Kapitel in dem Werke des Clavius durchzusehen, und seinen Mitteilungen verdanke ich in der Hauptsache das Angeführte. Eine eingehende Darstellung der Methode des Clavius wird Herr Haller im Jahrg. 1899 in der Bibliotheca math. erscheinen lassen. — Clavius behandelt in demselben Werke auch die Methode des Analemmas zusammenfassend.

kreises zu bestimmen. Beachtet man weiter die Sätze: Ein sphärisches Dreieck besteht aus lauter Hauptkreisbögen, das Bild eines jeden Kugelkreises in der Astrolabiumsebene ist wieder ein Kreis, und alle Hauptkreise, welche mit der Projektionsebene denselben Winkel einschliefsen, berühren einen mit dem Äquatorkreise konzentrischen Kreis, so lassen sich die sämtlichen sphärischen Dreiecke aus je drei gegebenen Stücken leicht abbilden, und die übrigen drei Stücke werden dann durch Abmessungen und einfache geometrische Konstruktion aus diesen Bildern gefunden. So wenig praktischen Wert solche graphische Lösungen wegen ihrer Kompliziertheit besitzen, so ist es doch von Interesse zu sehen, wie man mit dieser Methode die ganze sphärische Trigonometrie zu beherrschen imstande ist. Wir werden übrigens sehen, dafs die Methode des Clavius später mit einigen Abänderungen auch dazu benützt wurde, um sphärische Dreiecke wenigstens mit einiger Annäherung durch direkte Ablesungen an einem eigens hierzu eingerichteten Planisphärium zu berechnen.

Clavius zur Seite steht der mit Fink befreundete Astronom Giovanni Antonio Magini[1]) (1555—1617), seit 1587 Professor am öffentlichen Gymnasium in Padua. Er genofs unter seinen Zeitgenossen eines hohen Ansehens[2]), und wenn auch der gröfste Teil desselben aus seinen Kenntnissen in der Astrologie entsprang, der er besonders huldigte, so mufs ihm doch die Geschichte das Zeugnis eines begabten, mit unermüdlichem Fleifse und enormer Arbeitskraft ausgestatteten Mathematikers geben. Dies bestätigen namentlich die riesigen Tabellenwerke, teils astronomischer, teils trigonometrischer Natur, die seinen Namen tragen. Von den letzteren erwähnen wir vor der Hand nur das unter dem Titel „De planis triangulis liber unicus. Ejusdem de dimitiendi ratione per Quadrantem et geometricum quadratum libri quinque" 1592 zu Venedig in 4^0 erschienene Werk. Aus ihm ersieht man, dafs Magini die Schriften des Vieta, des Bressieu, des Clavius und Rhaeticus[3]) und namentlich des Fink, mit dem er nach dessen Rückkehr von Italien noch lange im Briefwechsel[4]) stand, genau kannte.

Neben der in diesem Buche behandelten weniger Interesse bietenden ebenen Trigonometrie findet sich eine auf 7 Stellen berechnete Sinus-, Tangenten- und Sekantentafel, die die Funktionen für alle Minuten

---

1) Vgl. A. Favaro, Carteggio Cap. I. — 2) Tiraboschi, Storia della letteratura italiana. 1796. VII. 449. — 3) Magini erwähnt in seinem Werke carta 14^v den kleinen Kanon des Rhaeticus von 1551. — 4) In einem dieser Briefe drückt Fink seine Freude darüber aus, dafs Magini seine (des Fink) Bezeichnungen Tangens und Secans gut geheifsen und aufgenommen habe. Favaro, Carteggio. 210. Brief vom 1. August 1593.

der Winkel gibt. Sie zeichnet sich durch besonders sorgfältige Berechnung aus und weist zum erstenmale eigene Namen für Cotangente und Cosekante, nämlich tangens, beziehungsweise secans „secunda" auf, die der analogen Bezeichnung des Cosinus bei Maurolycus nachgebildet sind. Später liefs Maginus noch ein grofses trigonometrisches Werk erscheinen, auf das wir aber erst weiter unten eingehen können, wenn wir die zwischenliegende Entwickelung unserer Wissenschaft kennen gelernt haben.

Wie die Schriften des Clavius und Maginus von der Geometria rotundi Fink's stark beeinflufst waren, so gilt dies auch von des Niederländers Philipp von Lansberg[1]) Buch, das den Titel führt: „Triangulorum geometriae libri quatuor". Lugd. Batav. 1591 in 4°[2]); ja die demselben beigegebenen Tafeln der Sinusse, Tangenten und Sekanten sind als ein völlig genauer Abdruck der Tafeln Fink's zu bezeichnen. Auch die zur Berechnung der Tangenten- und Sekantentafeln dienenden Theoreme, die wir zuerst bei Vieta fanden, und die teils Bressius, teils Fink bewiesen, beweist er genau wie diese. Ähnliches gilt von den beiden Trigonometrien, die sich in Sätzen und Ableitungen enge an Fink anschliefsen. Nur das eine ist hervorzuheben, dafs aufser einem neuen Beweis für den Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie, auch der entsprechende Satz für die Winkel hier zum erstenmale im Drucke erscheint; wir sagen, im Drucke erscheint, da wir nicht zweifeln, dafs Vieta und Tycho Brahe schon früher in seinem Besitze waren (vgl. S. 181), denn Lansberg's Ableitung desselben ist keineswegs stichhaltig. Nachdem er nämlich den Cosinussatz für die Seiten durch die beiden Gleichungen $r : \sin b = \text{sinvers } A : x$ und $r : \sin c = x : \text{sinvers } (b - c)$ ausgedrückt hat, sagt er einfach: Da $r^2 : (\sin b \cdot \sin c) = r^2 : (\sin B \cdot \sin C)$ und $\text{sinvers } A : [\text{sinvers } a - \text{sinvers } (b - c)] = \text{sinvers } a : [\text{sinvers } A - \text{sinvers } (180^0 - B - C)]$, so gilt auch der Satz:

$r^2 : (\sin B \sin C) = \text{sinvers } a : [\text{sinvers } A - \text{sinvers } (180^0 - B - C)]$.

Da die obigen Proportionen mit keinem Worte begründet werden, so ist hiermit der Satz natürlich nicht bewiesen.

Lansberg nimmt diesen Satz ausdrücklich als seine Erfindung in Anspruch. Hätte er ihn abgeleitet, dann könnte

1) Lansberg (1561—1632) war zu Gent geboren, wurde Prediger der reformierten Lehre in Antwerpen, dann in Goes in Zeland und zog sich um 1614 nach Middelburg in den Ruhestand zurück, wo er sich mit mathematischen und astronomischen Studien beschäftigte. Als Astronom genofs er einen bedeutenden Ruf. — 2) Da die erste Ausgabe dieses Werkes von verschiedener Seite auf 1631 verlegt wird, so bemerken wir, dafs die Münchener Hof- und Staatsbibliothek die Ausgabe von 1591 besitzt.

man ihm eher Glauben schenken, so aber mufs man wohl vermuten, dafs er irgendwoher Kenntnis von Vieta's Methode der Umsetzung (Enallage) erhalten hatte.

Die Autoren, deren Schriften wir zuletzt besprachen, lebten räumlich sehr weit voneinander getrennt: die einen jenseits der Alpen, der andere im Norden des Kontinents, und doch schöpften sie reichlich aus derselben Quelle: dem Buche Finks — ein Beweis für die Verbreitung und den Einfluſs desselben, der sich noch lange geltend machte.

§ 6. Wiedererfindung und Ausbildung der Prosthaphaeresis.

Wir erwähnten schon, dafs Vieta der erste war, der trigonometrische Studien wenigstens teilweise um ihrer selbst willen, oder aus rein theoretischem Interesse betrieben hatte; er blieb aber auch zunächst noch der einzige. Denn in der Hauptsache war das Gedeihen mathematischer Forschung immer noch von den Bedürfnissen der Astronomie abhängig, wenn auch schon seit einiger Zeit die Kosmographie und noch mehr die Geodäsie allmählich trigonometrische Methoden in Anspruch nahmen. Wir müssen uns daher, um das Wachstum unserer Wissenschaft zu verfolgen, nach jenen Stellen begeben, wo die Astronomie ihre hauptsächlichste Pflege fand. Zwei Zentralpunkte astronomischer Forschung waren es aber damals, von denen die so dringend notwendige Reform der Sternkunde ausging: in Deutschland Kassel, woselbst der fürstliche Astronom Landgraf Wilhelm IV. schon 1561 eine Sternwarte erbaut hatte, und in Dänemark die Insel Hueen, wo der grofse Tycho Brahe in seiner Uranienburg residierte, die ihm König Christian II. mit allen Hilfsmitteln der Beobachtungskunst hatte ausstatten lassen.

Wilhelm IV. (1532—1592)[1]), der sich das damals wichtigste Ziel gesetzt hatte, neue verbesserte Sternverzeichnisse zu entwerfen, beobachtete von 1561 an in seiner auf dem Zwehrenthore in Kassel erbauten Sternwarte zuerst allein, sah sich aber dann 1576[2]) nach Mitarbeitern um, als sich durch Übernahme der Regierung seine Mufsestunden bedeutend verringert hatten. Seine Blicke fielen dabei auf Christoph Rothmann aus Bernburg[3]), welcher sich eben zur Besichtigung der Sternwarte in Kassel befand, und sein Scharfblick

1) Notiz in Zach's Monatlicher Correspondenz 12. 1805. 267—302. — 2) Wahrscheinlich wurde er durch Tycho Brahe, der ihn auf einer Reise durch Deutschland 1575 besuchte, hierzu veranlafst. — 3) Allgemeine deutsche Biographie 29. 370—72. Artikel von S. Günther. Geburts- und Todesjahr Rothmann's sind unbekannt.

täuschte sich nicht in ihm, denn Rothmann war sowohl ein trefflicher Beobachter, als auch ein guter Mathematiker, der namentlich die Rechnungs- und Reduktionsarbeiten (seit 1577) zur vollen Zufriedenheit seines Herrn erledigte.

Weit bedeutender aber als Rothmann, war der zweite Gehilfe, den sich Wilhelm zwei Jahre später verschrieb, der Schweizer Jobst Bürgi[1]) aus Lichtensteig (1552—1632). Dieser zeichnete sich durch ganz eminentes mechanisches Geschick aus und wurde deshalb vom Landgrafen als Hofuhrenmacher angestellt. Aber nicht weniger hervorragend war auch seine mathematische Erfindungsgabe, und seine Leistungen erwecken umsomehr Bewunderung, als er die mathematische Litteratur nur insoweit kannte, als ihm andere davon Mitteilungen machten, da er der lateinischen Sprache nicht mächtig war. Wahrscheinlich unter Rothmann's Anleitung bildete er sich rasch zum gewandtesten Mathematiker aus und ersetzte den Mangel erlernter Kenntnisse durch Reichtum an eigenen Gedanken.

Um das Jahr 1584 kam nun an den Hof des Landgrafen ein gewisser Paul Wittich (1555?—1587) aus Breslau, der sich von 1580 bis 81[2]) bei Tycho auf der Uranienburg aufgehalten hatte, und blieb längere Zeit in Kassel. Von ihm berichtet sowohl Bürgi[3]) als auch ein gewisser Raymarus Ursus[4]), er habe den ersten Fall der sogenannten prosthaphäretischen Methode, die wir S. 135 als eine Erfindung Werner's kennen lernten, den Kasseler Astronomen als eine Rechnungsmethode gezeigt, die schon länger auf der Uranienburg bei den astronomischen Berechnungen angewendet werde, ohne jedoch einen Beweis dafür anzugeben. Ursus erzählt dann weiter, dafs Bürgi hierfür einen so fruchtbaren Beweis ge-

1) R. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz. Zürich 1858. 8°. Erster Cyklus. 57—80. Der Landgraf nennt ihn einen zweiten Archimedes an Geschicklichkeit. Tychonis Brahei Epistolarum Astronomicarum libri. Norimb. 1601. 4°. 21. Vgl. auch Zach a. a. O. 281. — 2) Diese Datumsbestimmung ergibt sich aus dem Briefwechsel Tycho's mit Hagaecius und Scultetus; vgl. Friis. Tychonis Brahei epistolae ab anno 1568 usque ad annum 1587. Hauniae 1876—86. in 4°. Aus dem Briefe Tycho's vom 4. Nov. 1580 an Hagaecius geht nämlich (p. 55) hervor, dafs Wittich um diese Zeit schon auf Uranienburg war, und aus dem Schreiben an Scultetus vom 12. Okt. 1581, dafs er damals Hueen bereits wieder verlassen hatte (p. 58—59). — 3) In seiner „Arithmetica". R. Wolf. Astronomische Mitteilungen Nr. XXXI. p. 10. — 4) Scheibel teilt in seiner „Einleitung zur astronomischen Bücherkenntnis 7. Stück, Breslau 1785. 17 ff. mit, dafs jener Reimers das oben Angeführte in dem Werke „Tractatus de astronomicis hypothesibus" Pragae 1597. 4° angebe, aber auch in desselben Autors Fundamentum astronomicum. 1588. 4° finden wir c. 16 den Wittich erwähnt.

funden habe, dafs aus ihm der andere prosthaphäretische Fall und sein (des Ursus) Beweis, ja die Auflösung aller Dreiecke durch diese Methode vermittelst der Sinusse, Tangenten und Sekanten hergeleitet werden könne. Hiervon habe dann Jakob Curtius dem Clavius Nachricht gegeben, der diese Erfindung erweitert und auch dem Tycho 1590 darüber geschrieben habe[1]). Aus dieser in ihrer Hauptsache richtigen Erzählung geht hervor, dafs entweder Wittich und Tycho[2]) das prosthaphäretische Verfahren selbständig wiedererfanden, wozu ihnen übrigens die Kenntnis jener Stelle in Werner's Schriften Anleitung gegeben haben kann, in welcher dieser seine Methode zur Berechnung der Länge der Spica virginis[3]) erwähnt (S. 136), oder dafs sie die Dreiecksbücher Werner's eingesehen hatten, was aber weniger Wahrscheinlichkeit für sich hat. Jedenfalls sind diese beiden Männer die ersten, die sich der praktischen Methode wieder bedienten.

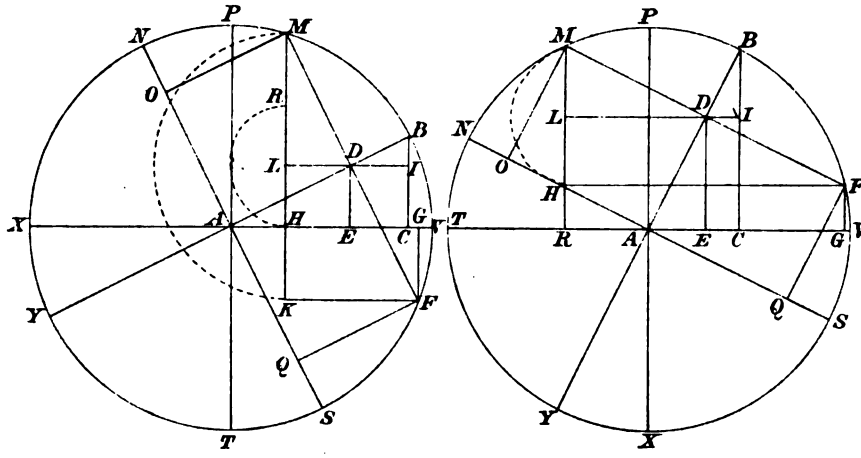


Fig. 46.

Nikolaus Raymarus Ursus teilt zum erstenmale in einem Druckwerke 1588[4]) die beiden prosthaphäretischen Regeln mit, indem er bezüglich ihrer Ableitung auf die beiden Diagramme (Fig. 46)

---

1) Die Nachricht ist dahin umzuändern, dafs Curtius 1590 selbst direkt an Tycho schrieb. Jener Brief des gewesenen kais. Prokanzlers ist nämlich noch erhalten und findet sich in Tycho's Astronomiae instauratae mechanica 1602. in fol. veröffentlicht. — 2) Auch Longomontan, Tycho's langjähriger Gehilfe, nennt Tycho und Wittich die ersten, die sich dieser Methode bedienten. Astronomia Danica. Amstelodami 1622. 7. — 3) Diese Beobachtung war Tycho in der That bekannt, denn er greift Werner's Resultat an. Dasselbe wird von ihm an verschiedenen Stellen erwähnt, so z. B. in seinem Briefe vom 20. Jan. 1587 an Rothmann p. 76 der Epist. astr. libri. — 4) Fundamentum astronomicum c. 16^{v} und 17^{r}.

verweist, von denen er das erste dem Wittich, das zweite dem schon genannten Bartholomäus Scultetus[1]), Lehrer und Bürgermeister in Görlitz, widmete. Es sei in beiden Figuren arc. $BV = \alpha$, arc. SF = arc. $MN = \beta$, dann ist in der ersten $\alpha + \beta < 90^0$, in der zweiten $\alpha + \beta > 90^0$. Ferner sei $FDM \perp AB$ und BC, DE, FG, $MH \perp AV$ gefällt, $HK = FG = MR$, bezüglich $HR = FG$ gemacht und MO und $FQ \perp NS$ gezogen, das $\mid MF$ läuft; macht man dann noch $DLJ \parallel AV$, dann ist in der ersten Figur arc. $VM = 90^0 - \beta + \alpha$, arc. $VF = 90^0 - \beta - \alpha$, $MH = \sin(90^0 - \beta + \alpha)$, $FG = HK = MR = \sin(90^0 - \beta - \alpha)$. Aber $LH = DE = \frac{1}{2}RH = \frac{1}{2}(MH - MR) = \frac{1}{2}\{\sin(90^0 - \beta + \alpha) - \sin(90^0 - \beta - \alpha)\}$. Ferner ist $BC = \sin\alpha$, $AD = FQ = \sin\beta$ und $AB : AD = BC : DE$, somit für $AB =$ Sintotus

$$\text{sintot} : \sin\beta = \sin\alpha : \tfrac{1}{2}\{\sin(90^0 - \beta + \alpha) - \sin(90^0 - \beta - \alpha)\},$$

und aus der zweiten Figur folgt durch analoge Überlegungen:

$$\text{sintot} : \cos\beta = \cos\alpha : \tfrac{1}{2}\{\sin(\beta + 90^0 - \alpha) - \sin(\beta - 90^0 + \alpha)\}.$$

Durch diese Proportionen, die natürlich in Worten angeführt werden, sind die beiden Hauptsätze der Prosthaphäresis gegeben.

Nach dem von Wolf[2]) beigebrachten Beweismaterial glauben wir die beiden Beweisführungen für Bürgi in Anspruch nehmen zu dürfen, der sicher auch den dritten Fall kannte, welcher für $\alpha + \beta = 90^0$ eintritt. Allerdings wurde derselbe erst von Clavius publiziert, als er in seinem Astrolabium zum erstenmale eine ausführliche Darstellung jener Regeln gab und ihre Anwendung auf die Berechnung des ebenen Dreiecks und auf alle 6 Fälle des rechtwinklig sphärischen Dreiecks zeigte. Kamen dabei in einer Formel Tangenten vor, wie z. B. in $\text{sintot} : \operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\varphi : x$, so setzte er $\operatorname{tg}\delta = \sin\alpha$, $\operatorname{tg}\varphi = \sin\beta$ und erhielt nach Aufsuchung von α und β, x wieder nach obigen Regeln. Dies ging natürlich nur so lange, als der Zahlenwert der Tangente den Sinustotus nicht überschritt; war dies der Fall, also etwa $\operatorname{tg}\varphi > 10^n$, so dividierte er das betreffende Glied mit 10^n, setzte den Rest $= \sin\beta$ und mufste dann nach Anwendung der Prosthaphäresis auf das Produkt $\sin\alpha \cdot \sin\beta$ noch das Produkt aus $\sin\alpha$ und dem Quotienten addieren. Hatte man z. B. unter Zuhilfenahme einer fünfstelligen Tafel das Produkt $212834 \cdot 53545$ zu

---

1) Scultetus oder Schulz lebte von 1532—1614, war in jungen Jahren ein Freund Tycho Brahe's, lehrte Mathematik zu Leipzig und Wittenberg und wurde später Bürgermeister zu Görlitz. Von ihm hat man ein Werk über die Sonnenuhren, über den Kometen von 1577 und eine sphärische Astronomie. Keplcri Opera omnia. Ed. Frisch II. 605. — 2) Astronomische Mitteilungen XXXII. 56—59. Vgl. auch Pitiscus Trigonometriae libri quinque. Editio secunda. Aug. Vind. 1608. in 4°. lib. V. 159—163.

bilden, so suchte man zu 12834 und 53545 in der Sinustafel die entsprechenden Winkelwerte, bildete 12834·53545 nach der prosthaphäretischen Regel und addierte noch zum Resultate 200000·53545; ähnlich war die Behandlung, wenn beide Faktoren den Radius der Tafel überstiegen. Stand ferner der Sinus totus nicht an der ersten Stelle der Proportion, z. B. $a:10^n = b:x$, so dafs $x = 10^n \frac{b}{a}$ zu berechnen war, so thaten die Sekanten und Cosekanten ihre Schuldigkeit, indem man $a = \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$, $b = \sin\beta$ setzte, woraus sich wieder $x = 10^n \sin\alpha \sin\beta$ ergab, das auf die bekannte Weise weiter behandelt wurde.

Erst durch diese beiden Erweiterungen[1]), die Clavius zuerst veröffentlichte, womit jedoch nicht gesagt ist, dafs sie nicht auch Bürgi und andere schon in Erwägung gezogen hatten, erhielt die Methode jene Allgemeinheit, die sie zu einem namentlich für den rechnenden Astronomen unentbehrlichen Hilfsmittel machten, bis sie durch die Erfindung der weit verwendbareren Logarithmen langsam verdrängt wurde.

Aufser Clavius hat später (1598)[2]) noch ein gewisser Melchior Jöstel[3]), der aus Dresden stammte und in Wittenberg Mathematik lehrte, diese Methode für alle möglichen Fälle durchgearbeitet und sie auf die Behandlung der Dreiecke angewandt. Ob jedoch seine noch handschriftlich erhaltene προσθαφαιρέσεις astronomica im Drucke erschien, entzieht sich unserer Kenntnis, scheint uns jedoch nicht wahrscheinlich[4]).

Nachdem die Methode einmal als praktisch erkannt war, wurde sie allgemein auf die verschiedensten Probleme der sphärischen Astronomie angewendet, selbst da, wo es sich um die Behandlung schiefwinkliger Dreiecke handelte, und zwar behauptet Reimers[5]), auch diese Anwendung der Methode rühre von Bürgi her und zeigt, wie dieser die Winkel aus den drei Seiten und aus zwei Seiten und dem

---

1) Clavius verhehlte sich jedoch keineswegs, dafs die Methode durch das Umrechnen an Genauigkeit verliert, wenn statt der Sinusse die übrigen Funktionen eintreten; man suchte jedoch hierbei durch Benützung vielstelliger Tafeln nachzuhelfen. — 2) Diese Jahrzahl gibt Longomontan, Astronomia Danica. 1622. p. 10. — 3) Vgl. A. v. Braunmühl, Bibliotheca mathematica 1898. p. 94. Beantwortung der Anfrage 68. — 4) Herr M. Curtze teilte uns gütigst mit, dafs ein Manuskript von Jöstel's Traktat sich in der Wiener Hofbibliothek befindet: Cod. Palat. 10686[67]. Wir haben dasselbe inzwischen eingesehen und uns in einer Abhandlung „Zur Geschichte der prosthaphäretischen Methode", die demnächst erscheinen wird, darüber näher verbreitet. Die Originalniederschrift von Jöstel's Traktat befindet sich in der k. Bibliothek zu Dresden. C. 82. (Briefliche Mitteilung von Curtze.) — 5) Fundamentum astronomicum c. 19[v].

eingeschlossenen Winkel die dritte Seite zu berechnen lehrte. Dieses Verfahren ist nichts anderes, als die direkt aus der Figur des Analemmas[1]) entnommene Umgestaltung des Cosinussatzes mittelst der prosthaphäretischen Methode. Wir wollen dasselbe wegen der Bedeutung, die es damals hatte, in einem der beiden Fälle erläutern. Gegeben sind die drei Seiten des Dreieckes ABC (Fig. 47), gesucht ist $\sphericalangle A$. Es werden hierzu zwei Figuren angegeben[2]), die für die Fälle $a < 90^0$ und $a > 90^0$ aus bekannten Gründen unterschieden werden mufsten. Wir teilen nur die dem ersten Falle entsprechende mit. In derselben ist DH die Schnittgerade derjenigen Parallelkreisebene, die durch C senkrecht zur Projektionsebene ABF gelegt ist, und zugleich bedeutet C einmal die Ecke des sphärischen Dreieckes und dann die orthogonale Projektion derselben auf jene Ebene. Ähnlich ist G die senkrechte Projektion des Schnittpunktes der Kreise ACG und EKE' und V die des Schnittpunktes von Kreis BVB' und JKF. Das Übrige ist aus der Figur zu ersehen. Man hat jetzt arc. AC = arc. AD, also arc. $DE = 90^0 - b$, arc. $AB = c$ = arc. EF, also arc. $FD = 90^0 - b + c$ und $DS = \sin(90^0 - b + c)$. Ferner arc. HJ = arc. EF — arc. $DE = c - (90^0 - b)$ und also $LS = \sin(c - 90^0 + b)$. Es ist aber:

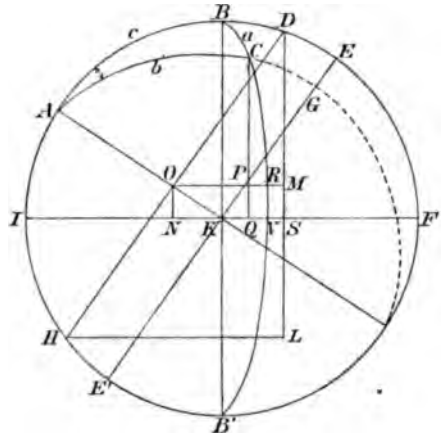


Fig. 47.

(I) $DM = \frac{1}{2} DL = \frac{1}{2}(LS + DS) = \frac{1}{2}\{\sin(90^0 - b + c) + \sin(c - 90^0 + b)\}$

und

(II) $SM = DS - DM = \frac{1}{2}\{\sin(90^0 - b + c) - \sin(c - 90^0 + b)\}$;

(I) wird mit „inventum primum", (II) mit „inventum sesundum" bezeichnet. Weiter ist noch arc. $CV = 90^0 - a$, $CQ = \sin(90^0 - a)$ und $CQ - MS = CP$ = inventum tertium; oder

(III) $CP = \sin(90^0 - a) - \frac{1}{2}\{\sin(90^0 - b + c) - \sin(c - 90^0 - b)\}$.

---

1) Die Methode des Analemmas war aufser aus Regiomontan's und Werner's Schriften damals bereits aus der Veröffentlichung der Ptolemäischen Schrift durch Commandinus 1562 allgemein bekannt. — 2) Fund. Astr. 21^v und 22^r.

Da nun $\triangle DOM \sim \triangle COP$ ist, so folgt $OC : DO = CP : DM = III : I$. Aber $OC : DO = \sin(90^0 - A) : KE = \cos A : \text{sin tot.}$; also hat man endlich $\cos A : \text{sin tot.} = III : I$. Um die Einfachheit der Rechnung beurteilen zu können, beachte man den Gang derselben. Man schlägt zuerst die Sinusse der Summe und der Differenz von c und $90^0 - b$ auf, der zweite zum ersten addiert und halbiert gibt (I), dieses von dem ersten Sinus abgezogen gibt (II), welches wieder von $\sin(90^0 - a)$ subtrahiert das „inventum tertium" liefert. Die Auflösung der Proportion gibt dann schliefslich $\sin(90^0 - A)$, zu dem man A mittelst der Tafel bestimmt. Vereinigen wir die Formeln in eine, so haben wir

$$\text{(IV)} \quad \cos A = \frac{\cos a - \frac{1}{2}\{\cos(b-c) + \cos(b+c)\}}{\frac{1}{2}\{\cos(b-c) - \cos(b+c)\}},$$

die zeigt, dafs in der Formel des Cosinussatzes, wie sie Vieta etwas später gab, nur die beiden Produkte $\cos b \cdot \cos c$ und $\sin b \cdot \sin c$ durch ihre prosthaphäretischen Formeln ersetzt sind.

Bürgi und nach ihm Jöstel sind aber in der Anwendung dieser Methode sogar noch weiter gegangen, denn ersterer verstand es, die zur Berechnung der Formel

$$\cos a = \tfrac{1}{2}\{\cos(b-c) + \cos(b+c)\} + \tfrac{1}{2}\{\cos(b-c) - \cos(b+c)\}\cos A$$

noch nötige einmalige Multiplikation ebenfalls durch eine Addition zu ersetzen[1]), indem er den für $\frac{1}{2}\{\cos(b-c) - \cos(b+c)\}$ erhaltenen Zahlenwert wieder als sinus eines Winkels (x) auffafste und dann das Produkt $\sin x \sin(90^0 - A)$ abermals prosthaphäretisch behandelte; d. h. er ersetzte, nach unserer Auffassungsweise, das letzte Glied der obigen Gleichung durch $\frac{1}{2}\{\sin(x+A) + \sin(x-A)\}$. Übrigens scheint diese praktische Verbesserung der Methode auch in weitere Kreise gedrungen zu sein, obwohl Bürgi selbst nichts über sie veröffentlichte, denn sie findet sich mit geometrischer Ableitung in der „Trigonometrie" des Pitiscus[2]), der sie als Erfindung des Schweizers angibt und mit Beispielen belegt. Auch fanden wir sie in dem schon erwähnten Manuskripte Jöstel's[3]), welcher sie auf Formel (IV) (s. oben) ausdehnte, indem er daselbst den Zähler gleich $\sin x$, den Nenner gleich $\text{cosec}\, y$ setzte und dann $\frac{\sin x}{\text{cosec}\, y} = \sin x \sin y$ wieder prosthaphäretisch behandelte[4]).

Man wird dieser Ausdehnung und gewandten Verwertung des neuen Verfahrens seine Bewunderung nicht versagen können. Doch

---

1) R. Wolf, Astronomische Mitteilungen Nr. XXXII. 61. — 2) Auflage von 1608. p. 139. Letzte Auflage 1612. p. 173. Dies ist Wolf entgangen. — 3) A. a. O. p. 37. — 4) A. a. O. p. 35.

scheint uns, trotz ausdrücklicher Versicherung Reimers', nur diese letzte endgiltige Verbesserung desselben von Bürgi herzustammen, während die Anwendung auf das schiefwinklige Dreieck überhaupt aufser von Werner[1]) schon von Tycho Brahe und Wittich vollzogen wurde. Bevor wir jedoch auf die Begründung dieser unserer Ansicht eingehen, müssen wir uns etwas näher mit Tycho beschäftigen. Wir erwähnten schon, dafs auf der Insel Hueen unter Tycho de Brahe's (1546—1601) Leitung eine Zentralstätte astronomischer Forschung entstanden war. Der dänische König, durch Landgraf Wilhelm auf Tycho aufmerksam gemacht, hatte diesen mit reichen Mitteln ausgestattet, und Tycho baute sich daselbst ein Observatorium, die Uranienburg, wie ein solches seit den Zeiten der Araber und Perser die Welt nicht mehr gesehen hatte. Dort beobachtete und rechnete er in gröfster Zurückgezogenheit, umgeben von zahlreichen Schülern, stand aber in fortwährendem schriftlichen Verkehr mit der wissenschaftlichen Welt, namentlich mit Wilhelm IV., mit dem ihn gemeinsame Interessen eng verbanden. 17 Jahre (1580—97) dauerte sein Aufenthalt auf der weltabgeschiedenen Insel, bis ihm infolge der Mifsgunst des dänischen Adels, nach dem Tode seines königlichen Gönners die gewährten Einkünfte entzogen wurden, so dafs er sich genötigt sah, seine fürstliche Wohnstätte zu verlassen. Einem Rufe Kaiser Rudolph's II. folgend, der später auch Bürgi zu sich beschied, ging er 1599 nach Prag, woselbst er aber schon 1601 starb.

Tycho war als Mathematiker weniger hervorragend, denn als Beobachter, und doch zeigt ein von ihm hinterlassenes Manuskript[2]) grofse Gewandtheit in Behandlung der Trigonometrie. Dasselbe ist nach Angabe des Herausgebers jenem kleinen Kanon des Rhaeticus von 1551 angebunden und besteht aus 20 Blättern, die nur teilweise beschrieben sind. Schon dieser Umstand weist darauf hin, dafs es nur Notizen enthält, die Tycho für sich und seine Schüler zum Gebrauche dieses Kanons machte, ohne zunächst an eine Publikation der Schrift zu denken. Diese Ansicht wird noch dadurch bestätigt, dafs die Figuren nur angedeutet, Beweise aber nirgends

---

1) Vgl. Anmerk. 2 auf S. 136. — 2) Es führt die Überschrift: Triangulorum planorum et sphaericorum praxis mathematica. Qua maximus eorum, praesertim in astronomicis usus compendiose explicatur. Tycho Brahe. Cal. Jan. 1591. In trigono juvenis satagit quae docta Mathesis ille aperit, clausum quicquid olympus habet A. c. 1595. 13 $\frac{\text{cal.}}{\text{X bris.}}$. Es befindet sich in der k. k. Universitätsbibliothek zu Prag und ist von F. J. Studnicka 1886 in Photographotypie herausgegeben worden.

ausgeführt sind[1]). Was nun den Inhalt anlangt, so bemerken wir zunächst vorübergehend, dafs in Dogma IV über die ebenen Dreiecke der schon bei Vieta gefundene Satz $\operatorname{tg} C = \frac{c \sin B}{a - \cos B}$ (vgl. S. 178) in etwas bequemerer Form als dort auftritt. Von gröfserem Interesse ist es aber, dafs die in dem Schriftchen behandelte sphärische Trigonometrie in allen Problemen die prosthaphäretischs Methode verwendet. Tycho kennt die beiden Fundamentalformeln derselben und wendet sie sowohl auf die Berechnung der rechtwinkligen Dreiecke, als auch in der oben auseinandergesetzten Weise auf die Umgestaltung des Cosinussatzes an, den er in Dogma VI und IX zur Lösung derselben beiden Aufgaben verwendet, die wir bei Raymarus Ursus fanden. Nur behält er noch immer die Bildung des letzten Produktes bei, kannte also Bürgi's endgiltige Verbesserung der Methode nicht. Diese ist daher jedenfalls Eigentum des genialen Schweizers. Aber Tycho behandelte auch in gleicher Weise den einen der beiden polaren Fälle, nämlich aus zwei Winkeln und der anliegenden Seite den dritten Winkel zu berechnen (Dogma VII), indem er eine Regel in Worten angab, die wir in folgender Weise darstellen können. Sind die gegebenen Winkel B und $C > B$, die gegebene Seite a, so werden die beiden Fälle $90^0 - C > B$ und $90^0 - C < B$ unterschieden, denen das obere, beziehungsweise das untere Zeichen zugehören möge. Bildet man dann

$$\tfrac{1}{2}\{\sin(90^0 - C + B) \pm \sin(90^0 - C - B)\} = \text{Inventum I},$$

$$\tfrac{1}{2}\{\sin(90^0 - C + B) \mp \sin(90^0 - C - B)\} = \text{Inventum II},$$

so ist $\frac{\sin(90^0 - a) \cdot \text{II}}{\text{sin tot.}} = \text{Inventum III}$ und $\sin(90^0 - A) = \text{Inv. I} \pm \text{Inv. II}$.

Es wäre also demnach $\cos A = \frac{1}{2}\{\cos(B - C) + \cos(C + B)\} + \frac{1}{2}\{\cos(C - B) - \cos(C + B)\}\cos a$, oder $\cos A = \cos C \cdot \cos B + \sin C \cdot \sin B \cos a$, wobei jedoch das Zeichen des ersten Gliedes nicht richtig ist. Da keine Ableitung, sondern nur der Wortlaut[2]) der Regel angegeben ist, so wird man zu der Vermutung geführt, Tycho habe sich um die letztere überhaupt nicht bekümmert und den Satz entweder irgendwo falsch abgeschrieben, oder einer oberflächlichen mündlichen Mitteilung, vielleicht von Seite Wittich's, folgend durch einfache Vertauschung von Winkeln und Seiten aus dem Cosinussatze abgeleitet[3]).

---

1) In einem Briefe an einen seiner Schüler Gellius Sascerides vom 1./II. 1591 sagt Tycho allerdings, dafs er diese seine Methode im ersten Teile seiner Astronomie veröffentlichen werde. A. Favaro, Carteggio 204. Das ist aber nicht geschehen. — 2) In diesem heifst es: Adde Inventum III ad Inventum I anstatt: Subtrahe Inventum I ab Invento III. — 3) Er sagt auch

Da Tycho's vorliegende Schrift über die Dreiecke frühestens aus dem Jahre 1591 stammt, so hätten wir keinen Grund gehabt, oben die von Reimers behauptete Priorität Bürgi's inbezug auf die prosthaphäretische Umgestaltung des Cosinussatzes in Frage zu stellen, wenn sich nicht aus dem uns erhaltenen Briefwechsel des dänischen Astronomen mit ziemlicher Sicherheit ergäbe, dafs er schon lange im Besitze jener Anwendungen war, ja dafs Exemplare seines Heftes schon früher existierten und in den Händen seiner Schüler sich befanden[1]). Übrigens kommt Bürgi und Reimers jedenfalls das Verdienst zu, zuerst weitere Kreise mit jener Methode bekannt gemacht zu haben, und vor allem waren es das vielgelesene Werk des Bartholomäus Pitiscus und wohl auch der Vortrag Jöstel's in Wittenberg, die auch die Anwendungen auf schiefwinklige Dreiecke populär machten. Zu verwundern ist übrigens, dafs gerade jene all' und jede Multiplikation ersparende Methode, die zweifellos Bürgi's Eigentum ist, weniger Verwendung fand, als jene Tycho's, die immer noch eine Multiplikation erforderte[2]).

Neben den bereits erwähnten Formeln kamen damals auch noch die ähnlichen

$$\sin\text{vers}\, A = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\frac{1}{2}\{\cos(b-c) - \cos(b+c)\}}$$

und

$$\sin\text{vers}\, A = \frac{\sin\text{vers}\, a - \sin\text{vers}\,(b-c)}{\frac{1}{2}\{\cos(b-c) - \cos(b+c)\}}$$

in Anwendung, von denen z. B. Pitiscus[3]) die erste, (die übrigens mit jener schon von Werner benützten übereinstimmt), Magini die zweite[4]) anführt. Desgleichen berechnet dieser auch a mit der aus der letzteren durch Auflösung nach sin vers a hervorgehenden Formel[5]). Die Methode der Prosthaphäresis erfreute sich einer solchen Beliebtheit, dafs sie auch noch nach Erfindung der Logarithmen (1614) längere Zeit im Gebrauch blieb. So empfahl sie der Däne Christian Severin Longomontan (1562—1647), welcher ein langjähriger Gehilfe Tycho's gewesen war und nach dessen Tode Professor der Mathematik in Kopenhagen wurde, auf das wärmste. In seiner schon

---

am Schlusse seines Satzes: „Fuit itaque operatio similis priori." Auch in Dogma IV über die ebenen Dreiecke findet sich eine fehlerhafte Angabe. Dies deutet doch zum mindesten auf eine sehr flüchtige Redaktion der Schrift hin.

1) Das Beweismaterial haben wir in der schon erwähnten Abhandlung: „Zur Geschichte der prosthaphäretischen Methode" gesammelt. — 2) Wir konnten sie nur noch bei Magini finden. Primum mobile duodecim liberis contentum 1609. Bononiae fol. 85^{v}. — 3) Pitisci, Trigonometria. Ausgabe von 1612. 123 ff.; von 1600. 34—35. — 4) Maginus, Primum mobile fol. 72^{v}. — 5) Ebenda fol. 85^{v} und Christmann, Theoria Lunae 1611. in fol. 166.

erwähnten „Astronomia Danica" von 1622 gibt er ihr sogar den Vorzug vor den ihm wohlbekannten Logarithmen, „weil durch sie die Regeldetri mit Behandlung der gegebenen Dinge selbst vollführt wird", während „das Verfahren mit den Logarithmen zu weit von beständiger Ansicht der Beweise entfernt, die vielleicht Anfängern nötiger ist" [1]). Bei der damals noch sehr mangelhaften Begründung der Logarithmen kann man dieses Urteil wohl begreifen. Nach dieser Auseinandersetzung gibt Longomontan für jene Methode eine übersichtliche und vollständige Darstellung, aus der wir nur die Behandlung jenes Falles noch hervorheben, in welchem ein Ausdruck von der Gestalt $x = ab:c$ berechnet werden sollte. Wie dies schon Jöstel gethan hatte [2]), so setzte auch Longomontan, der sich ganz an jenen anschloſs, zuerst $y = b:c$ und dann $x = y \cdot a$, welche zwei Ausdrücke einzeln prosthaphäretisch behandelt wurden. Desgleichen wird die Umformung der beiden Cosinussätze mitgeteilt.

Ein Beweis dafür, daſs die Astronomen sich nur schwer von der so beliebt gewordenen prosthaphäretischen Methode trennten, ist, daſs noch 1634 der Hamburger Frobenius in seinem „Clavis universae trigonometriae" alle mitgeteilten Beispiele sowohl mittelst der Logarithmen, als mit der Prosthaphäresis berechnet, obwohl er für seine Person den ersteren bereits den Vorzug gibt und sogar vor dem Gebrauch der letzteren warnt, wenn statt der Sinusse andere Funktionen auftreten. Einer der letzten Schriftsteller, der sich ihrer noch im vollen Umfange und mit besonderer Vorliebe bediente und zwar weil er, wie es scheint, die Logarithmen gar nicht kannte, dürfte der jüdische Astronom Emanuel Porto [3]) sein, welcher im Jahre 1636 ein recht gutes Werk den „Porto astronomico" erscheinen lieſs [4]). Darin erwähnte er den Traktat des Melchior Jöstel, dem er sich völlig anschloſs; wie er zur Kenntnis desselben gelangte, entzieht sich jedoch unserem Wissen.

---

1) A. a. O. 10. Übersetzung von Kästner, Geschichte der Mathematik I. 567. — 2) Jöstel's Traktat. p. 15. III. Regula. — 3) Porto heiſst eigentlich Menachem Zion Port Cohen und lebte in Triest und Padua. G. Wertheim. Monatsschrift für Geschichte und Wissenschaft des Judentums. 41. Jahrg. 616. Er schrieb noch ein zweites ebenfalls gutes Werk: Breve e facil introduzzione alle geografia e trigonometria. Padova 1640, worin er sich über Einrichtung und Gebrauch der im ersten Werke mitgeteilten Tafeln verbreitete und eine ebene Trigonometrie im Anschlusse an Pitiscus gab. Wertheim ebenda, Jahrg. 42. p. 375 ff. — 4) Nähere Beschreibung desselben ebenda 616—622.

§ 7. Raymarus Ursus. Jobst Bürgi's Methoden zur Herstellung einer genauen Sinustafel.

Wir haben in der im Zusammenhang dargestellten Geschichte der Prosthaphäresis mehrere Mathematiker kennen gelernt, die sich auch sonst noch um die Förderung der trigonometrischen Kenntnisse verdient machten, und müssen daher ihre Leistungen einer näheren Besprechung unterziehen. Halten wir uns soviel als möglich an die chronologische Reihenfolge, so begegnet uns zunächst Nikolaus Raymarus Ursus[1]) oder Reimers, wie er sich in der ältesten von ihm vorhandenen Schrift, der „Geodaesia Ranzoviana" 1583 selbst nennt. Es kommt ihm keineswegs das Verdienst zu, welches er sich in der Vorrede zu seinem schon öfters erwähnten „Fundamentum astronomicum" von 1588 selbst vindiziert, die von Rhaeticus und Reinhold unvollendet gelassene Lehre von den Dreiecken zum Abschlusse geführt und mit besonderer Klarheit behandelt zu haben, denn was er auf den 44 Blättern dieses Büchleins vorträgt, enthält sehr wenig eigene Gedanken. Dagegen ist dasselbe für den Historiker insofern von Wert, als es uns mit den verschiedenen damals im Gebrauche befindlichen Methoden in Kürze bekannt macht, da Reimers seine Kenntnisse von den verschiedensten Seiten her gesammelt hatte.

Zur Berechnung der Sinustabellen erwähnt er mehrere Methoden, ohne sie jedoch genauer auseinanderzusetzen. Eine einzige hat er in seinem späteren Werke „De Astronomicis hypothesibus seu systemate mundano tractatus astronomicus et geographicus etc.", Pragae 1597 in 4^0 auseinandergesetzt, und er rühmt sich, sie selbst erfunden zu haben. Delambre, der dieses Verfahren einer genaueren Analyse unterzogen hat[2]), fand aber nichts Neues darin mit Ausnahme der einzigen Formel $2\sin(\alpha - x)\cos x - \sin\alpha = \sin(\alpha - 2x)$, die Ursus, $x = 1'$ voraussetzend, zur Berechnung der Sinusse aller Winkel verwendet, die von $\alpha = 3'$ beginnend von Minute zu Minute bis 90^0 fortschreiten. Fügt man dem noch bei, dafs er die sämtlichen Formeln, die er zu seiner Methode nötig hat, aus einer einzigen Figur nicht unelegant ableitet, so hat man seinen eigenen Verdiensten hinreichend Rechnung getragen. Aber er spricht noch von einer

1) Reimers stammte aus dem Dithmar'schen, war bis zu seinem 18. Jahre Schweinehirt und bildete sich selbst zum Mathematiker. 1584 besuchte er Tycho und kam zwei Jahre später an den Hof nach Kassel, wo er Bürgi's Bekanntschaft machte. — Später wurde er kais. Mathematiker in Prag, das er 1598 verliefs, um, wie man glaubt, einer Verleumdungsklage Tycho's zu entgehen, mit dem er in Streit lag. 1599 soll er gestorben sein. — 2) Histoire de l'Astronomie moderne. Paris 1821 in 4^0. I. 301—307.

anderen Methode, die von seinem verehrten Lehrer Bürgi herrühre und teilt sie in Form einer Regel[1]) mit. Leider ist dieselbe jedoch absichtlich so unklar gehalten, dafs man daraus schlechterdings nichts entnehmen kann, als dafs dieser „Kunstweg", wie sie Bürgi nannte, auf der Bildung der höheren Differenzen beruhte. Wir werden auf dieselbe weiter unten noch einmal zurückkommen, müssen aber vorher die Studien näher kennen lernen, die der geniale Schweizer machte, um genauere Methoden zur Berechnung eines Kanons der Sinusse zu finden, als sie bis dahin bekannt waren. Diese seine einschlägigen Arbeiten begegnen sich in manchen Punkten mit denen Vieta's über die Winkelteilung, scheinen aber einer etwas früheren Zeit anzugehören, und es ist nur zu bedauern, dafs sie mit so vielen anderen wertvollen Entdeckungen Bürgi's nie im Drucke erschienen, da derselbe der lateinischen Gelehrtensprache unkundig, eine unbesiegbare Scheu vor Publikation seiner eigenen Erfindungen hatte.

Der um die Geschichte der Astronomie so hochverdiente R. Wolf war in der Lage, eine Handschrift Bürgi's, die sich unter den Kepler'schen Manuskripten zu Pulkowa befindet, einer genauen Durchsicht zu unterziehen[2]). Dieselbe enthält eine „Arithmetica" und scheint Ende der neunziger Jahre vollendet, wenn auch schon viel früher begonnen zu sein. Dafs Bürgi schon während Reimers' Aufenthalt in Kassel, d. h. vor 1588, im Besitze einer Reihe von daselbst mitgeteilten Resultaten war, geht aus des letzteren Fundamentum hervor; dafs dieses Manuskript aber erst nach 1596 vollendet ist, schliefsen wir trotz Wolf's gegenteiliger Anschauung aus dem Umstande, dafs das Opus Palatinum erwähnt wird. Bürgi konnte aber doch nicht wohl mehrere Jahre vor Erscheinen dieses Werkes den eigentümlichen Titel desselben kennen, wenn ihm auch des Rhaeticus' Methoden etwa durch mündliche Mitteilung (vielleicht von Seite Otho's) schon früher bekannt sein mochten. In diesem Manuskripte spricht sich nun Bürgi dahin aus, dafs ihm die bisher gebrauchten geometrischen Methoden, namentlich was die näherungsweise Berechnung von sin 1′ anlangt, zu ungenau und „zu weit aus dem Weg" erschienen, und dafs man sich, da die Geometrie einen gegebenen Winkel nicht in einem gegebenen Verhältnis zu teilen vermöge, hierzu der Coss, d. h. der Algebra, bedienen müsse[3]). Auch er wurde also, ähnlich wie Vieta, durch die Trigonometrie zur Verknüpfung der Geometrie mit der Algebra geführt.

Um zur Teilungsgleichung zu gelangen, verfährt er folgender-

1) Fundamentum c. 8ᵛ. — 2) Astronomische Mitteilungen Nr. XXXI. — 3) Wolf teilt den durch grofse Einfachheit und Klarheit sich auszeichnenden Text a. a. O. 11—14 mit.

mafsen. Er schickt den Satz voraus: „Wenn man eine bekannte Sehne a zum Durchmesser 2 addiert, so erhält man das Quadrat der Sehne t, welche zur Mitte des Komplementbogens führt, wenn man sie dagegen vom Durchmesser subtrahiert, so erhält man das Quadrat der Chorde s desselben Komplementbogens". Das gibt in unserer Schreibweise die beiden Formeln $1 + \sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + 45^0\right)$ und $1 - \sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + 45^0\right)$, wenn $a = \mathrm{crd}(2\alpha) = 2\sin\alpha$ ist; denn dann ist $t = \mathrm{crd}(90^0 + \alpha) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + 45^0\right)$ und $s = \mathrm{crd}(90^0 - \alpha) = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 45^0\right)$, wie Fig. 48 zeigt. Um nun einen Bogen zu halbieren, dessen Sehne AB man kennt, geht man von dem geometrischen Satze (Fig. 49) aus, dafs $AC^2 = CE \cdot CD$, oder da $CE = 2$ ist, $CD = \frac{AC^2}{2}$ sein mufs. Ist jetzt AC die Unbekannte „Cosa", die wir $= x$ setzen, und führt man sie in die Gleichung $AC^2 - CD^2 = AD^2$ oder $4AC^2 - 4CD^2 = AB^2$ ein, so erhält man $AB^2 = 4x^2 - x^4$, deren Lösung x gibt [1]). Nun folgt die Dreiteilung eines Bogens, dessen Sehne AB bekannt ist. Setzt man $AC = x$, so folgt mit Benützung der vorhergehenden

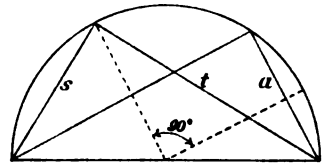


Fig. 48.

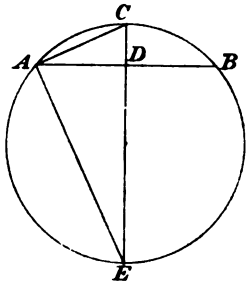


Fig. 49.

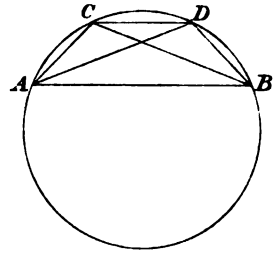


Fig. 50.

Gleichung aus Fig. 50 $AD^2 = 4x^2 - x^4$, $BC^2 = 4x^2 - x^4$, also $AD \cdot BC = 4x^2 - x^4$. Nach dem Satze des Ptolemäus ist aber $AD \cdot BC = AB \cdot CD + AC \cdot BD = AB \cdot x + x^2$, also durch Vergleichung $4x^2 - x^4 = ABx + x^2$, oder $AB = 3x - x^3$. Bürgi gibt nun an, wie man mit Hilfe dieser beiden Gleichungen alle Teilungen nach Zahlen vollziehen kann, die aus 2 oder 3 oder beiden zusammengesetzt sind. So erhält man z. B. für die Vier-

1) Statt x und seiner Potenzen bedient sich Bürgi der damals noch gebräuchlichen Zeichen: $x = 1R$ (Radix), $x^2 = 1z$ (Zensus), $x^3 = 1c$ (Cubus), $x^4 = 1zz$ (Zensi-Zensus), $x^5 = 1zc$ (Zensi-Cubus) u. s. w.

teilung $AB^2 = 16x^2 - 20x^4 + 8x^6 - x^8$, wofür er kurz $\overset{II}{16} - \overset{IV}{20} + \overset{VI}{8} - \overset{VIII}{1}$ schreibt. Die Gleichung für die Fünfteilung $AB = 5x - 5x^3 + x^5$ erhält er durch Zusammensetzung der Zwei- und Dreiteilungsgleichung. Es ist nämlich in Fig. 51 $AD^2 = 4x^2 - x^4 = BE^2$, $AE = 3x - x^3 = BD$, ferner $AB \cdot DE = AE \cdot BD - AD \cdot EB$.

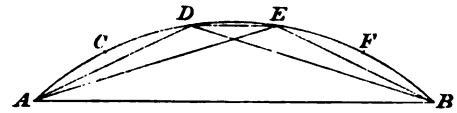


Fig. 51.

Also $AB = [(3x - x^3)^2 - (4x^2 - x^4)] : x = 5x - 5x^3 + x^5$. Aufserdem teilt Bürgi umstehende Tabelle mit[1]), die er bis zur Zwanzigteilung fortsetzt: Die in der ersten Zeile stehenden römischen Zahlen bedeuten nach der angeführten Schreibweise die Potenzen von x, die arabischen Ziffern die Koeffizienten. So folgt z. B. die Sehne a des neunfachen Bogens aus der des einfachen x, indem man aus der 9. Zeile entnimmt: $a = 9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9$. Berechnet ist die Tabelle einfach, indem von der Reihe der ungeraden Zahlen ausgehend die aufeinanderfolgenden Summenreihen gebildet wurden.

Wir sehen also, dafs Bürgi ebenso wie Vieta das Bildungsgesetz der Koeffizienten in jenen Ausdrücken erkannt hat[2]). Zur numerischen Auflösung seiner Teilungsgleichungen besafs er drei Verfahren. Das eine hat uns Pitiscus überliefert[3]) und an numerischen Rechnungen seine Verwendbarkeit gezeigt. Aber dieses Verfahren stimmt so genau mit jenem Divisionsverfahren überein, das wir bei den Arabern kennen lernten (S. 74), dafs wir nicht nötig haben, hier noch einmal darauf zurückzukommen. Sollte Bürgi wirklich selbst genau auf den nämlichen Gedankengang gekommen sein, wie einst die Araber? Unmöglich ist es nicht, da derselbe nicht so sehr ferne liegt, und Bürgi's Erfindungsgabe und Geschicklichkeit im Rechnen bedeutend genug waren, um die Methode durchzubilden. Es ist aber auch möglich, wie wir schon früher andeuteten (S. 73 Anmerkung 1 v. S. 72), dafs das Verfahren durch einen arabischen Schriftseller, etwa Al-Zarkâli, nach dem Abendlande kam, und dafs Bürgi durch andere davon erfuhr und seine Wichtigkeit erkannte, nur bleibt es dann überraschend, dafs man in früheren

1) Wolf a. a. O. 19. — 2) Wolf, der das Mitgeteilte in dem schon erwähnten Manuskripte Bürgi's fand, scheint übrigens nicht gewufst zu haben, dafs Pitiscus dasselbe ganz ebenso als „ex mente Justi Byrgii" in seiner schon mehrfach zitierten Trigonometrie mitteilt. Auflage von 1612. 44 ff. Dreiteilung 53, Fünfteilung 54–57. — 3) A. a. O. 53. Lösung der Dreiteilungsgleichung, 61 der Fünfteilungsgleichung, die in die Form gebracht wird: $x = \frac{a + 5x^3 - x^5}{5}$.

Werken keine Spur hiervon findet, und namentlich, dafs Peurbach und Regiomontan es nicht kannten, während sie doch mit Al-Zarkâli's Schriften wohl vertraut waren.

Das zweite Verfahren, dessen sich der Schweizer bediente, ist von R. Wolf in seiner Arithmetica aufgefunden worden und besteht in Folgendem. Hat man z. B. die Dreiteilungsgleichung für $a = \text{crd}\,60^0 = \text{crd}\,300^0 = 1$ zu lösen, also die Gleichung $(3 - x^2)x - 1 = 0$, so macht er zuerst eine Annahme α für x, deren letzte Stelle nicht

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
1																			
	1																		
3	—	1																	
	4	—	1																
5	—	5	+	1															
	9	—	6	+	1														
7	—	14	+	7	—	1													
	16	—	20	+	8	—	1												
9	—	30	+	27	—	9	+	1											
	25	—	50	+	35	—	10	+	1										
11	—	55	+	77	—	44	+	11	—	1									
	36	—	105	+	112	—	54	+	12	—	1								
13	—	91	+	182	—	156	+	65	—	13	+	1							
	49	—	196	+	294	—	210	+	77	—	14	+	1						
15	—	140	+	378	—	450	+	275	—	90	+	15	—	1					
	64	—	336	+	672	—	660	+	352	—	104	+	16	—	1				
17	—	204	+	714	—	1122	+	935	—	442	+	119	—	17	+	1			
	81	—	540	+	1386	—	1782	+	1287	—	546	+	135	—	18	+	1		
19	—	285	+	1254	—	2508	+	2717	—	1729	+	665	—	152	+	19	—	1	
	100	—	825	+	2640	—	4290	+	4004	—	2275	+	800	—	170	+	20	—	1

um eine Einheit unter dem wahren Werte steht, und berechnet dann ihre Korrektur nach der Formel

$$\triangle\alpha = \frac{(3 - \alpha^2)\alpha - 1}{2\alpha^2 + 2\alpha \cdot 10^n - (3 - \alpha^2)},$$

wo n den Rang derjenigen dekadischen Einheit angibt, welche gröfser ist als die Verbesserung. Als erste Annahme dient ihm $\alpha = 1$; hieraus folgt dann für $n = 0$, $\triangle\alpha = 0{,}5$, also als zweiter Näherungswert $\alpha + \triangle\alpha = 1{,}5 = \alpha_1$. Weiter erhält man dann mit der obigen Formel für $n = -1$, $\triangle\alpha_1 = 0{,}03$, $\alpha_2 = 1{,}53$, dann für $n = -2$,

$\triangle\alpha_2 = 0{,}002$, $\alpha_3 = 1{,}532$ u. s. w., so dafs sich für $x = 1{,}5320888862$ ergibt. Leider hat Bürgi nicht angegeben, wie er zu dem Verfahren kam. Ersetzt man in der gegebenen Gleichung 3. Grades x durch $\alpha + \triangle\alpha$, so findet man die Formel

$$\triangle\alpha = \frac{(3-\alpha^2)\alpha - 1}{2\alpha^2 + (3\alpha + \triangle\alpha)\triangle\alpha - (3-\alpha^2)},$$

die mit der obigen übereinstimmt, wenn man $(3\alpha + \triangle\alpha)\triangle\alpha = 2\alpha \cdot 10^n$ setzt, was unserer Annahme für n entspricht. Eine solche Formel konnte natürlich Bürgi nicht aufstellen, also auch eine solche Vergleichung nicht vornehmen, aber dennoch ist es Thatsache, dafs er nach dem durch jene Formel dargestellten Verfahren gerechnet hat.

Ferner zeigt dieses Beispiel auch, dafs Bürgi sehr wohl Kenntnis von den mehrfachen Wurzeln der Teilungsgleichungen hatte. Auch scheint er ebenso wie Vieta gewufst zu haben, wieviele positive Wurzeln zu dem Werte einer gegebenen Sehne gehören. Denn in einer Stelle der 1619 gedruckten „Harmonice mundi" gibt Kepler, welcher mit Bürgi in späterer Zeit gut bekannt war und von ihm manches lernte, die Gleichung zur Bestimmung des regelmäfsigen Siebeneckes, indem er sich ausdrücklich auf Bürgi bezieht und sagt, dafs die Gleichung beim Fünfeck zwei, beim Siebeneck drei, beim Neuneck 4 Wurzeln „und so weiter" habe. Hierin liegt aber die Erkenntnis, dafs eine Teilungsgleichung von ungeradem Grade $2n+1$ stets n positive Wurzeln besitzt, aufs deutlichste ausgesprochen[1]).

Die dritte Methode, mit welcher der gewandte Rechner diese Gleichungen löste, bestand in der Anwendung der von Alters her bekannten Regel des falschen Ansatzes, welche er an der auf Null reduzierten Gleichung für die Neunteilung genau in derselben Weise erläuterte und ausführte, wie wir es noch heute machen[2]).

Bürgi wollte nun, namentlich zur besseren Verwendung der prosthaphäretischen Methode, eine in den letzten Stellen genaue, von 2″ zu 2″ fortschreitende Sinustafel herstellen, und hat sie auch, wie sein Schwager Benjamin Bramer versichert[3]), „mit unsäglicher Arbeit kalkuliert". Leider ist sie, die nach Kepler's Zeugnis alle anderen an Genauigkeit übertraf, nie im Druck erschienen und scheint verloren zu sein. Bei Herstellung derselben kam der Schweizer auf jenen Gedanken, der seit Abû'l-Wafâ aus der Geschichte ver-

1) Hierauf hat schon Cantor II. 591 aufmerksam gemacht. — 2) Wolf a. a. O. 21 ff. — 3) B. Brameri Bericht zu Jobsten Burgi seligen Triangularinstrument 1648 in 4°. Die Tafel wurde damals mit Spannung erwartet, denn schon 1592 erkundigte sich Tycho in einem Briefe an Rothmann darnach. Dafs sie Bürgi vollendet hat, geht auch aus seiner Einleitung (Wolf 11) auf das deutlichste hervor.

schwunden war, den Sinus totus gleich 1 zu setzen und die Sinusse in Dezimalteilen desselben auszudrücken, indem er statt des Kommas unter die Einerstelle der Ganzen eine kleine Null setzte und als einer der ersten das Rechnen mit Dezimalbrüchen ausbildete [1]); später scheint er auch das Komma selbst benützt zu haben. Kepler hat seine Kenntnis der Dezimalrechnung auch von Jobst Bürgi bekommen, indem er ausdrücklich sagt: „Diese Art der Bruchrechnung ist von Jost Bürgen zu der sinusrechnung erdacht.“ [2])

Dem praktischen Bürgi scheinen aber diese Methoden, welche allerdings mit grofser Genauigkeit, aber auch mit einem ebenso grofsen Aufwand von Rechnungsarbeit die Herstellung einer Sinustafel gestatten, nicht recht genügt zu haben, denn er hat noch ein zweites Verfahren erfunden, seinen sogenannten „Kunstweg“. Wir gedachten desselben schon früher (S. 204—205) und erwähnten, dafs man aus Reimers' Angaben in seinem Fundamentum nur entnehmen kann, dafs die Methode eine Differenzenmethode war. Dies wird auch durch zwei Stellen des Pulkowaër Manuskriptes bestätigt, in dem leider der Kunstweg selbst nicht angegeben ist, so dafs wir gegenwärtig über ihn keine Aufklärung besitzen [3]). Auch wird sich das darüber schwebende Dunkel kaum mehr lichten lassen, da wir auch bei den Zeitgenossen Bürgi's keine näheren Angaben finden [4]). Auch sie verstanden Reimers' rätselhafte Andeutungen nicht, wie sich aus einer Stelle seines späteren Werkes „De astronomicis hypothesibus“ ergibt, in der er selbst sagt, dafs man ihn um Aufklärung hierüber gebeten habe. Aber die Aufklärung, die er hier gab, fügte zu den alten Rätseln nur noch ein neues hinzu. Es scheint ihn sein Hafs gegen Tycho daran gehindert zu haben, das vorteil-

1) Vgl. hierüber: End, Einführung und Entwickelung der Dezimalbrüche. Zeitschrift für das bayerische Realschulwesen. XVII. 1896. 9 und 11. — 2) Auszug aus der uralten Mefs-Kunst Archimedis. Opera Kepleri. Ed. Frisch. V. 547. — 3) Die erste dieser Stellen lautet: „Durch vleissiges nachsinnen habe ich in erfahrung gebracht wie der gantze canon sinuum durch seine Differentias zu erheben ist, wölliche Invention hernach Nicolaus Reimarus Ursus under meinem Namen publizirt“ (Wolf 11). Ferner schliefst das Manuskript mit einem unvollendeten Kapitel mit der Überschrift: „Wie der gantze Canon Sinuum durch die bloffe Differentias je zweier Sinuum von anfang bis zum ende zu erheben sei.“ Wolf bemerkt p. 24, dafs nach einer kurzen Einleitung von diesem Kapitel nur noch eine Seite vorhanden sei, auf der erklärt wird, wie durch Zuzug der höheren Differenzen mit gröfserer Sicherheit interpoliert werden kann. — 4) Nur Pietro Antonio Cataldi gibt in seiner Schrift „Difesa di Archimede delle oppositioni del Sig. Gioseppe Scaligero intorno alla quadratura del cerchio, con l'esame del Divinum inventum di Nicole Raymaro.“ Bologna 1620 in 2° eine Untersuchung über diese Stelle Reimers'. Leider stand uns aber das genannte Werk nicht zur Verfügung.

hafte Verfahren näher auseinanderzusetzen, denn er sagt „Tycho sei nicht würdig, dafs er ihn dieses Verfahren lehre“[1]). Wir möchten glauben, dafs hierdurch der wackere Bürgi um den wohlverdienten Ruhm gekommen ist, lange vor Briggs und Newton ein praktisches Interpolationsverfahren angegeben zu haben.

Man wird fragen, wie der Hofuhrenmacher und Mechaniker des Landgrafen Wilhelm dazu kam, mit solch zäher Ausdauer die Verbesserung der astronomischen Rechnungsmethoden anzustreben. Dies findet seine Erklärung darin, dafs Bürgi nach dem Weggange Rothmann's von Kassel (1590) dessen Stelle als Beobachter und Rechner allein versehen mufste, während er ihn bisher nur unterstützt hatte. So bot sich ihm Anlafs und Gelegenheit genug, sein mathematisches Talent aufs beste zu bethätigen, und Wilhelm IV. wufste dasselbe auch gebührend zu würdigen. Auch als der lelztere gestorben war, blieb Bürgi noch bis zum Jahre 1603 im Dienste von Wilhelm's Sohn Moritz, folgte dann aber einem Rufe Kaiser Rudolf II. nach Prag, der ihn zum kais. Kammeruhrenmacher ernannte, in welcher Eigenschaft er auch noch bei dessen Nachfolger Ferdinand verweilte. Er starb 1632. Während seines Aufenthaltes in Prag kam er in Berührung mit Kepler, der ihn sehr hoch schätzte und ihn als eine Koryphä der mathematischen Wissenschaften pries[2]). Thatsächlich ist dieses Lob auch nicht zu hoch gegriffen, wenn man bedenkt, wie dieser Mann ganz aus eigener Kraft, ohne je einen grundlegenden Unterricht genossen zu haben, ja ohne der Gelehrtensprache mächtig zu sein, die damals ein unerläfsliches Erfordernis zum Studium der zeitgenössischen Litteratur war, nach den verschiedensten Richtungen die Wissenschaft zu fördern vermocht hatte. Wir werden

---

1) Wolf glaubte, eine von Bürgi's Schwager Benjamin Bramer in der Schrift „Problema: Wie aufs Bekanntgegebenem Sinu, eines Grades Minuten oder Secunden, alle folgenden Sinus auffs leichteste zu finden und der Canon Sinuum zu absolviren seye.“ Marpurg 1614 in 4° angegebene Methode stehe mit diesem Kunstgriff in engem Zusammenhang. Diese besteht in der Hauptsache darin, dafs er Sinus und Cosinus jedes folgenden vielfachen Winkels aus dem vorhergehenden abzuleiten suchte und hierfür Regeln aufstellte, die wir durch folgende Formeln wiedergeben: $\sin 2\alpha = S\cos\alpha$, $\sin 3\alpha = \sin\alpha + S\cos 2\alpha$, $\sin 4\alpha = \sin 2\alpha + S\cos 3\alpha$ u. s. w., ebenso $\cos 2\alpha = 1 - S\sin\alpha$, $\cos 3\alpha = \cos\alpha - S\sin 2\alpha$, $\cos 4\alpha = \cos 2\alpha - S\sin 3\alpha$ u. s. w. Dabei ist $S = \mathrm{crd}\, 2\alpha = 2\sin\alpha$ und wird wie $\sin\alpha$ als bekannt angenommen. Hat man daher eine Tafel der Vielfachen von S, so kann man durch blofse Addition die Sinusse und Cosinusse aller Vielfachen von α finden (Wolf a. a. O. 26). Uns scheint jedoch diese Ansicht Wolf's nicht mit den ausdrücklichen Worten des Manuskriptes zu harmonieren. — 2) De stella tertii honoris in Cygno narratio. Pragae 1606. Opera omnia J. Kepleri. Ed. Frisch II. 769.

ihm noch einmal begegnen, wenn wir auf die Geschichte der Erfindung der Logarithmen zu sprechen kommen, in der ihm ebenfalls eine ehrenvolle Stellung gebührt.

§ 8. Das Opus Palatinum des Rhaeticus vom Jahre 1596.

In seinen im Jahre 1593 erschienenen „Ideae mathematicae" teilt Adrianus Romanus einen Brief des Rhaeticus an Peter Ramus vom Jahre 1568 mit, in welchem dieser angibt, er habe zwei Canones zum gröfsten Teile ganz vollendet, einen kleineren für den Radius 10^5, und einen grofsen, der teils für $r = 10^{10}$, teils für $r = 10^{15}$ berechnet sei. Aufserdem erzählt er, dafs er 9 Bücher über das rechtwinklige und schiefwinklige sphärische Dreieck und ein Buch über das ebene Dreieck verfafst habe. Wir sehen aus diesem bisher nicht beachteten Schriftstücke, dafs der gröfste Teil des Riesenwerkes, zu dessen Besprechung wir uns jetzt wenden und das von allen Astronomen mit Sehnsucht erwartet wurde, bereits 1568, also 28 Jahre vor seinem Erscheinen, von Rhaeticus vollendet war[1]).

Da Rhaeticus die unternommene Riesenarbeit natürlich nicht allein bewältigen konnte, so stellte er mehrere Rechner an, die er während zwölf Jahren auf eigene Kosten beschäftigte. Unter diesen befand sich auch ein gewisser Valentin Otho (um 1550 in Magdeburg geboren), der sich 1575 dem damals gerade in Ungarn weilenden Rhaeticus angeboten hatte. Dieser nahm ihn sehr freundlich auf und weihte ihn alsbald in seine Methoden ein. Als man nach einiger Zeit die erste und zweite Serie der bereits berechneten Tabellen benötigte, die Rhaeticus bei seinem letzten Aufenthalt in Krakau daselbst gelassen hatte, schickte er den Otho ab, um sie zu holen. Inzwischen erkältete er sich und starb 1576 zu Kaschau in Ungarn, wohin er sich auf Einladung des dortigen Präfekten Ruber begeben hatte, in den Armen des ihm inzwischen eilig nachgereisten Otho[2]). Auf seinem Sterbelager hatte er noch Otho die Vollendung seines Lebenswerkes an's Herz gelegt und ihm

1) Einen weiteren Beweis hierfür finden wir in dem schon früher zitierten Cod. lat. mon. 24101, auf welchen uns M. Curtze aufmerksam zu machen die Güte hatte. Derselbe beginnt nämlich mit: Georgii Joachimi Rhetici Canon triangulorum Johannes Praetorius Joachimicus Canonem hunc olim ab authore acceptum, descripsit Cracoviae Anno 1569. Idem denuo differentiis et sinuverso auctum, eundem depinxit Anno 1599 Mense Julio Altorfii. Dann folgt eine Abschrift des ganzen grofsen Kanons von Rhaeticus. — 2) Diese Erzählung, die in der Einleitung Otho's zum Opus Palatinum sich findet, haben bereits Kästner in seiner Geschichte der Mathematik I. 594 — 596 und Cantor II. 553 ausgezogen.

seinen wissenschaftlichen Nachlafs zugewiesen. Da aber die grofsen Geldmittel, welche die Vollendung und die Publikation des Werkes erforderten, nur schwer beschafft werden konnten, so verzögerte sich sein Erscheinen immer wieder, bis endlich Otho an dem Kurfürsten Friedrich IV. von der Pfalz einen thatkräftigen Gönner fand, dem zu Ehren er dasselbe im Jahre 1596 als „Opus Palatinum" zu Neustadt herausgab[1]). Wir wollen den Inhalt dieses fundamentalen Werkes einer möglichst gedrängten Besprechung unterziehen, indem wir zunächst die Methode der Tabellenberechnung, dann die Einrichtung des Kanons und endlich die trigonometrischen Methoden schildern, deren sich Rhaeticus und Otho bedienten. Die letzteren waren allerdings zur Zeit, als das Werk erschien, bereits in mancher Richtung überholt.

Dem ganzen Kanon liegt die Berechnung einer Sinustabelle zugrunde, für die er unter Annahme des Sinus totus $r = 10^{15}$ die Sinusse aller Winkel von 0^0 bis 90^0 in einem Intervall von $45'$ bestimmte. Dabei bediente er sich aber aufser der bekannten Regeln folgender zwei, die er geometrisch ableitete, und die sich in unserer Schreibweise durch die beiden Formeln[2]) ausdrücken lassen:

$$\cos(n\alpha) = \cos(n-2)\alpha - 2\sin\alpha\sin(n-1)\alpha$$

und

$$\sin(n\alpha) = 2\cos\alpha\sin(n-1)\alpha - \sin(n-2)\alpha.$$

Nun setzte er aber die „Dichotomia" (Halbierung), für welche er mehrere, jedoch nicht neue Regeln angab, solange fort, bis er auf einen Winkel kam, dessen Sinus nur noch eine Einheit in der 15. Dezimalstelle betrug, wozu 43 Halbierungen nötig waren. Der letzte Winkel, dessen Sinus er auf diese Weise fand, war $\alpha = 14^{VIII}\,19^{IX}\,16^{X}\,33^{XI}\,45^{XII}\,8^{XIII}\,27^{XIV}\,54^{XV}\,11^{XVI}\,9^{XVII}\,23^{XVIII}\,49^{XIX}\,6^{XX}\,5^{XXI}\,37^{XXII}\,30^{XXIII}$, wo die römischen Ziffern den Rang der Sexagesimalbrüche bezeichnen, so dafs z. B. $33^{XI} = \frac{33}{60^{11}}$ Teile eines Grades bedeutet. Die Dichotomien stellte er in einer Tabelle übersichtlich zusammen[3]). Nachdem nun für alle in dieser Tabelle stehenden

---

1) Der volle Titel lautet: Opus Palatinum de triangulis, a Georgio Joachimo Rhetico coeptum: L. Valentinus Otho, Principis Palatini Friderici IV. Electoris Mathematicus consummavit. Ann. Sal. Hum. 1596. Neostadii. in fol. — 2) Die zweite dieser Formeln weist schon R. Wolf. H. A. I. 170. Gleichung 1 dem Rhaeticus zu, dagegen stellt er die erste derselben auf Bürgi's Rechnung, während er dem Rhaeticus noch eine weitere zuteilt, die sich bei ihm thatsächlich nicht findet. Übrigens hat auch Vieta die zweite dieser Formeln und statt der ersten eine ganz ähnliche; publiziert wurden sie aber, trotz des spätern Erscheinens von Rhaeticus' Werk, dennoch hier zum erstenmale. — 3) Opus Palatinum 44 und 45. Vgl. auch Wolf H. I. 172.

44 Winkel die Sinusse und Cosinusse gefunden waren, konnte er mittelst der Additionsformel die Sinusse und Cosinusse gewisser Winkel bilden, die sich aus denen der Tafel zusammensetzten. So gewann er z. B. den Sinus des Winkels $\beta = 29'' 59^{III} 33^{IV} 37^{V} 58^{VI} 8^{VII} 30^{VIII}$ gleich 145408594115, indem er ihn aus den Sinussen der bezüglich in der 6., 8., 11. und 13. Zeile der Tafel stehenden Winkel: $42'' 11^{III} 15^{IV}$, $10'' 32^{III} 48^{IV} 45^{V}$, $1'' 19^{III} 6^{IV} 5^{V} 37^{VI} 30^{VII}$ und $19^{III} 46^{IV} 31^{V} 24^{VI} 22^{VII} 30^{VIII}$ nach dem Schema $6-(8+11+13)$ zusammensetzte. Indem Rhaeticus weiter schlofs, dafs sich die Sinusse kleiner und nahe gleicher Winkel zu einander verhalten, wie die Winkel selbst, fand er aus der Proportion $\beta : 30'' = \sin\beta : \sin 30''$ den Näherungswert $\sin 30'' = 145444102929$ und hieraus $\cos 30''$ 999999989423006. Hiermit ergab sich dann auch $\sin 1'$ und $\cos 1'$ und mit deren Hilfe eine Tafel[1]), die die Sinusse und Cosinusse von $1'$ bis $45'$ lieferte und die Berechnung dieser Funktionen für Winkel, die in einem Intervall von $1'$ fortschreiten, ermöglichte.

Es handelte sich jetzt noch darum, die Sinusse und Cosinusse für Dekaden von Sekunden zu finden. Aus den bereits bekannten Funktionswerten von $30''$ wurden zu diesem Zwecke zunächst die Werte für $15''$ durch Halbieren gesucht, dann aus der Tafel der Halbierungen $\sin 5''$ und $\cos 5''$ durch ein ähnliches Verfahren wie das zur Aufsuchung von $\sin 30''$ verwendete gewonnen, und hiermit ergaben sich unschwer die Werte der Funktionen in einem Intervall von $10''$. Durch diese eigentümliche Anordnung des ganzen Verfahrens gelang es Rhaeticus bei der praktischen Berechnung die Dreiteilung ganz zu vermeiden, theoretisch kannte er sie jedoch sehr wohl, indem er eine geometrische Ableitung der Teilungsgleichung mitteilte. Wir hoffen durch diese gedrängte Schilderung dem Leser einen, wenn auch nur leisen Begriff von der immensen Rechnungsarbeit gegeben zu haben, die erforderlich war, um nur die Zahlen der beiden Grundfunktionen zu finden; die der Tangenten und Cotangenten, der Sekanten und Cosekanten wurden dann mittelst der Beziehungen erhalten, die wir früher angegeben haben.

Die auf diese Weise geschaffene, übrigens auf 10 Dezimalen abgerundete Tafel hat die Überschrift „Magnus Canon doctrinae triangulorum ad decades secundorum scrupulorum et ad partes 10000000000“ und ist in der Weise eingerichtet, dafs die 6 Funktionen eines jeden Grades je 6 Seiten erfüllen, so dafs der ganze Kanon 543 eigens paginierte Folioseiten hält, von denen immer zwei nebeneinander aufliegende in derselben Weise zusammengehören, wie

1) Opus Palatinum 58.

dies bei dem kleinen Kanon von 1551 geschildert wurde. Dieser Tabelle ist aber noch eine zweite angefügt, welche für den Radius 10000000 berechnet ist und von zehn zu zehn Sekunden fortschreitet. Sie umfafst 180 wieder eigens paginierte Folioseiten und läuft von 0^0 bis 45^0 und zurück, wie die anderen Tafeln. Da sie neben dem weit gröfseren Kanon keine rechte Bedeutung mehr hat, so dürfte sie wohl früher als dieser von Rhaeticus fertig gestellt und zu eigener Veröffentlichung bestimmt gewesen sein.

Auf die Richtigkeit der im Opus Palatinum niedergelegten Zahlen werden wir noch weiter unten zu sprechen kommen, sowie auf einige andere Tafeln, die sich in dem Nachlasse des Rhaeticus und Otho fanden, als dieser in die Hände des uns schon bekannten Christmann in Heidelberg überging.

Wenden wir uns nun zu der Dreieckslehre des Rhaeticus. Auf Seite 86 des Opus Palatinum beginnt dieselbe mit dem ebenen Dreieck unter der Aufschrift (eigenes Titelblatt) „Georgii Jo. Rhaetici de triquetris rectarum linearum in planitie liber unus" und umfafst 19 Seiten, die aufser den schon mitgeteilten Definitionen und den Angaben[1]) über die Behandlung der einzelnen Dreiecksfälle nur noch folgende bemerkenswerte Lösung der Aufgabe enthalten, die Winkel eines Dreiecks aus den drei Seiten zu berechnen[2]). Er beschreibt zuerst in das Dreieck ABC den Berührungskreis mit dem Mittelpunkt D und berechnet die Abschnitte, welche die vom Zentrum auf die Seiten gefällten Senkrechten DE, DF, DG auf diesen bilden in der Form: $AG = AF = s - a$, $BE = BG = s - b$, $CF = CG = s - c$, wobei $2s = a + b + c$ gesetzt ist; hieraus findet er dann für den Radius die bekannte Formel $\varrho^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$[3]), und damit ergibt sich etwa aus $\triangle ADG$ $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\varrho}{AG}$[4]).

Nach Abschlufs der Lehre vom ebenen Dreieck beginnen vier Bücher über die sphärischen Dreiecke; die unter dem Titel „De triangulis globi cum angulo recto" 140 wieder eigens paginierte Folioseiten umfassen, und also nur vom rechtwinkligen Dreieck handeln. Die Methode, welche er mit Hilfe mehrerer durch überflüssige Kreise äufserst verwickelter Zeichnungen ableitet, geht aus jener des Copper-

---

1) Pag. 95 findet sich jener von uns schon bei Vieta erwähnte Beweis des Sinussatzes (S. 177). — 2) A. a. O. 99—102. — 3) Der Wortlaut, in dem diese Formel als Lemma mitgeteilt wird, entspricht genau der obigen Schreibweise. — 4) Die Schlufsformel $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ wird nicht in Form einer Analogie ausgesprochen, wie R. Wolf H. A. I. 179 irrig bemerkt.

nicus hervor und kann an der von uns entworfenen Figur 52[1]) leicht übersehen werden.

ABC ist das bei C rechtwinklige sphärische Dreieck[2]), O das Centrum der Kugel, auf welcher es liegt, dann liefert zunächst das bei G rechtwinklige Dreieck AFG, dessen Ebene senkrecht OB steht, $\sphericalangle F = \sphericalangle B$, und ebenso das bei J rechtwinklige Dreieck BKJ, dessen Ebene senkrecht OA ist, den $\sphericalangle K = \sphericalangle A$. Ergänzt

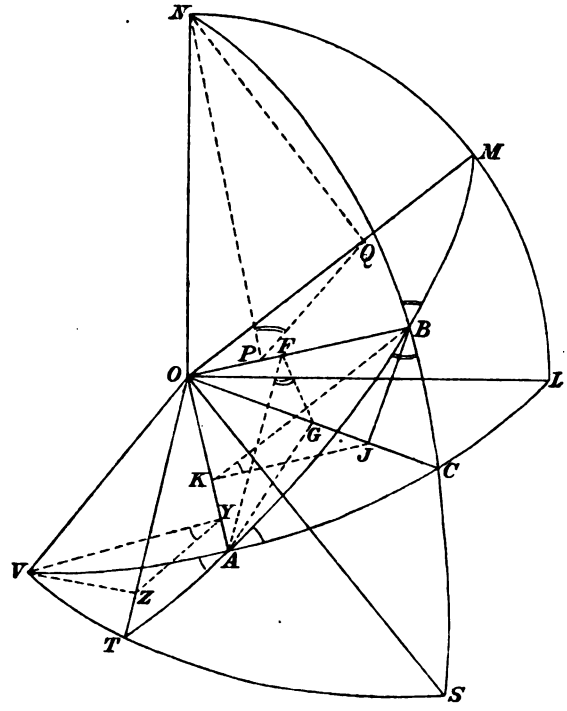


Fig. 52.

man ferner die Bögen AB, BC und CA je nach zwei Seiten zu Quadranten, sodafs z. B. $AB + BM$ wie $AB + AT$ 90^0 ausmachen, und legt die gröfsten Kreisbögen LMN und VTS, die bezüglich A und B zu Polen haben, so erhält man zwei neue Dreiecke BMN und ATV, deren Stücke in leicht erkennbarem Zusammenhange mit denen des Hauptdreiecks stehen. Konstruiert man noch das bei Q rechtwinklige $\triangle NPQ$, dessen Ebene auf OB senkrecht ist, so ist $\sphericalangle NPQ = \sphericalangle B$ und ebenso liefert das bei Z rechtwinklige Dreieck VYZ, dessen Ebene senkrecht OT steht, $\sphericalangle Y = \sphericalangle A$. Diese Figur

1) Vgl. die ähnliche bei Bressius S. 184. — 2) Rhaeticus bezeichnet es beständig mit DBC, während A der Kugelmittelpunkt ist.

gibt zu folgenden 5 Gruppen (Ordines) ähnlicher ebener Dreiecke Anlafs: 1) $\triangle AFG \sim \triangle OZV \sim \triangle NPQ$; 2) $\triangle BJK \sim \triangle VZY \sim \triangle DQN$; 3) $\triangle OFG \sim \triangle OJB$; 4) $\triangle OKJ \sim \triangle OGA$; 5) $\triangle OZY \sim \triangle OPQ \sim \triangle OKB$, und jede solche Ähnlichkeitsbeziehung liefert drei Proportionen der Dreiecksseiten, also im Ganzen 15 Analogien, die in einer Tabelle übersichtlich zusammengestellt werden. Diese 15 Analogien werden dann in 40 Theoremata umgesetzt, indem die in ihnen vorkommenden Strecken in vielfach verschiedener Weise als trigonometrische Funktionen der sphärischen Dreiecksstücke gedeutet werden können. Doch ist die Ausdrucksweise derselben teilweise so schwerfällig, dafs sie vollständig unbrauchbar würden, wenn nicht eine tabellarische Zusammenstellung mit abkürzender Schreibweise gegeben wäre[1]). Nehmen wir als Beispiel etwa eine aus der ersten Ähnlichkeit folgende Proportion, so wird die ihr entsprechende Analogie in der Tabelle folgendermafsen geschrieben:

$$OZ \cdot VZ \,|\, AG \cdot FG \,|\, p \cdot B \cdot b \cdot B \,|\, p \cdot AC \cdot p \cdot BOC^{2})$$

d. h. $OZ : VZ = AG : FG$, oder $\sin B : \cos B = \sin AC : FG$; FG ist, wie die Tabelle zeigt, aus $\triangle BOC$ auszudrücken, d. g. $FG = OG \sin BC = \cos AC \cdot \sin BC$; also folgt $\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} AC}{\sin BC} = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}$, welches die bekannte zweite Fundamentalgleichung des rechtwinkligen Dreiecks ist.

Natürlich finden sich in dieser Weise alle 6 Hauptgleichungen[3]) unter jenen 40 Analogien, und es ist nur zu bedauern, dafs Rhaeticus es nicht verstanden hat, die Anzahl derselben auf die allein nötigen zu reduzieren. Der Zweck des zweiten Buches ist es, zu zeigen, wie man die drei Serien des Kanons mit den 40 Theoremen in Verbindung zu bringen hat, um die 6 Fundamentalaufgaben zu lösen. Dabei wird aber eine geradezu unbegreifliche Langatmigkeit und Unübersichtlichkeit entwickelt, die das Werk für die Zeitgenossen fast unbenützbar machte; so sind z. B. der Lösung der einen Aufgabe, aus Hypotenuse und einem spitzen Winkel die übrigen Stücke zu berechnen, 66 Folioseiten gewidmet. Hätte Rhaeticus, anstatt alle überhaupt möglichen Lösungen einer jeden Aufgabe in der denkbar schwerfälligsten Bezeichnungsweise aufzuführen und alle einzelnen Spezialfälle eigens durchzubehandeln, die Anwendung seiner Theoreme

1) A. a. O. p. 20—21. — 2) p heifst perpendiculum = sin; b basis = cos. — 3) So enthält z. B. das Theorem III, p. 20 die von Vieta zuerst veröffentlichte, wenn auch wahrscheinlich von Rhaeticus schon viel früher gefundene 6. Relation $\cos c = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B$.

in kurzen und präzisen Worten angegeben, so würde er den Hauptinhalt des zweiten Buches auf einige Seiten gebracht haben, seine Methode wäre verstanden worden und hätte eine Zukunft gehabt!

Das dritte Buch behandelt mit derselben Gründlichkeit die verschiedenen möglichen Dreiecksformen auf der Kugelfläche und unterscheidet 16 Fälle, die aus 4 Figuren entstehen und in einer Tabelle zusammengestellt werden[1]). Die Einteilungsprinzipien sind drei: nach Seiten, nach Winkeln und nach Seiten und Winkeln. 6 Typen treffen auf die Dreiecke mit einem rechten Winkel, die 10 übrigen entsprechen schiefwinkeligen Dreiecken. Seit Naṣîr-Eddîn war dies wieder die erste systematische Aufstellung der verschiedenen Dreiecksformen. Eine solche war aber trotz ihrer Umständlichkeit damals thatsächlich noch sehr nötig, da man ja die Werte trigonometrischer Funktionen für Winkel, die einen rechten überschritten, analytisch noch nicht bestimmen konnte, die Regeln also für jede Dreiecksform wieder eigens geometrisch ableiten mußte. Aus dieser Tabelle der 16 Dreiecksformen ist dann eine weitere von 129 „Acquisita" abgeleitet, in welcher bestimmt wird, was sich in einem solchen Dreieck über die Winkel und Seiten aus der Angabe direkt aussagen läßt[2]). Dieselbe dient zur Behandlung der mehrdeutigen Fälle, die hier zum erstenmale in ihrer ganzen Vollständigkeit betrachtet werden.

Hiermit waren nun die Mittel geboten, um im 4. Buche, ähnlich wie im zweiten, die Regeln zur Berechnung aller dieser verschiedenen Dreiecke zu geben. Rhaeticus selbst aber behandelte nur mehr die 6 Typen der rechtwinkligen Dreiecke, während die 10 übrigen von L. V. Otho in weiteren 5 Büchern[3]) ganz im Sinne seines Lehrers durchgeführt sind. Das erste Buch bespricht die 10 Formen der möglichen Dreiecke, und die übrigen vier Bücher sind der Behandlung je einer der folgenden vier Grundaufgaben gewidmet: 1) Gegeben zwei Seiten und ein Winkel (II. Buch); 2) Gegeben eine Seite und zwei Winkel (III. Buch); 3) Gegeben alle Seiten (IV. Buch); 4) Gegeben alle Winkel (V. Buch).

Von diesen Aufgaben wird eine Reihe von Lösungen angeführt die sich nach zwei Gesichtspunkten gliedern: Zerspaltung des schiefwinkligen Dreiecks in zwei rechtwinklige mit Anwendung der Methode des Rhaeticus auf diese und direkte Auflösung der allgemeinen Drei-

1) A. a. O. 112. — 2) Z. B. Wenn in einem Kugeldreieck ein rechter und ein spitzer Winkel sind, so liegt dem letzteren eine Seite $< 90^\circ$ gegenüber, das Übrige bleibt unbestimmt. — 3) Die eigene Überschrift lautet: „De triangulis globi sine angulo recto libri quinque."

ecke durch Bildung der Neigungsdreiecke (ebener „Triquetra") einzelner Winkel. Diese letztere Methode ist nur eine Anwendung der Methode des Coppernicus auf alle speziellen Fälle, wobei es Otho jedoch versäumt, allgemein giltige Sätze (mit Ausnahme des Sinussatzes) aus ihr herzuleiten, die dann ein für allemal auf die Einzelprobleme anwendbar gewesen wären. Hierdurch wird die ganze Darstellung wieder enorm weitläufig (die fünf Bücher umfassen 341 Folioseiten!) und unübersichtlich und steht weit hinter der seit 1593 bekannten Behandlungsweise Vieta's zurück. Interessant daran ist die beständige Verwendung aller trigonometrischer Funktionen, die nur dadurch erschwert wurde, daſs nur zwei, der Sinus und der Cosinus, eigene Bezeichnungen führten; auch muſste der Umstand bei ihrer Benützung hinderlich sein, daſs man jedesmal wieder gezwungen war, die Figuren neu zu zeichnen, oder sich an äuſserst komplizierte und unübersichtliche Vorschriften zu halten[1]).

Die erwähnte Methode der Zerspaltung des zu berechnenden Dreiecks in zwei rechtwinklige bietet nichts Neues; dagegen muſs

1) Ein Beispiel wird die Methode deutlich machen. Ist in (Fig. h) O der Kugelmittelpunkt, sind in Dreieck ABC, $\sphericalangle A$, b und c gegeben, und soll $\sphericalangle C$ gefunden werden, so bildet Otho den Neigungswinkel Bck von $\sphericalangle C$ und den Neigungswinkel Bdk von $\sphericalangle A$ und geht darauf aus, $\cos a$ zu finden. Dieser ist für OB = sin. tot. = 10^{10} durch die Strecke Oc dargestellt, die sich aus $Og + gc$ zusammensetzt. Og wird aus dem bei d rechtwinkligen $\triangle Ogd$ bestimmt, wozu die Kenntnis von dO notwendig ist, das man mittelst der ersten Serie des Kanons aus $\triangle BOd$ gewinnt, da $\sphericalangle BOA = c$ bekannt ist. Da aber $\sphericalangle AOC = b$ gegeben ist,

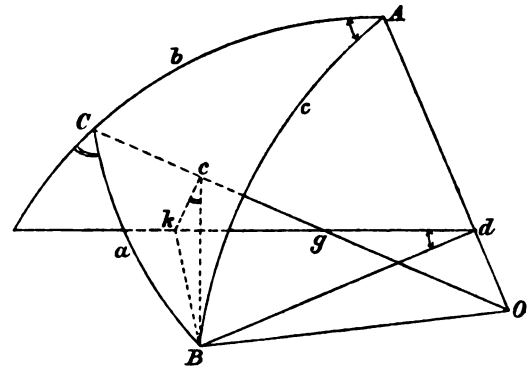


Fig. h.

so findet man für $Od = 10^{10}$ aus der 2. Serie des Kanons Og in Teilen von Od und hieraus auch in Teilen von OB ($Og = OB \cdot \cos c \cdot \sec b$) und daneben gd in Teilen des Kugelradius ($gd = Od \operatorname{tg} b = OB \cdot \cos c \cdot \operatorname{tg} b$). Dieser Wert ist notwendig zur Berechnung von gc, das aus dem bei c rechtwinkligen $\triangle gkc$ bestimmt wird. Nun ist aber $gk = kd - gd$, kd kennt man aus $\triangle Bkd$, indem man $Bd = 10^{10}$ nimmt und bemerkt, daſs $\sphericalangle Bdk = \sphericalangle A$ ist ($kd = Bd \cos A = BO \sin c \cdot \cos A$). Da ferner $\sphericalangle kgc = 90^0 - b$ ist, so ist gc zunächst mittelst der 1. Serie in Teilen von kg und dann durch Umrechnung in Teilen von OB bekannt ($cg = kg \sin b = OB(\sin c \cdot \cos A - \cos c \cdot \operatorname{tg} b) \sin b$). Fügt man diese einzelnen Stücke in eine Schluſsformel zusammen, so erhält man natürlich den Cosinussatz.

bemerkt werden, dafs Otho auch einzelne seiner Aufgaben mit jenen Regeln löste, die sich aus der Projektionsmethode des Analemma ergaben, ohne jedoch irgendwo ihre Herkunft anzudeuten. Es waren ihm dieselben jedenfalls aus der zeitgenössischen Litteratur bekannt und er glaubte sie vielleicht deshalb nicht weiter begründen zu müssen.

Fassen wir unser Urteil über Rhaeticus' und Otho's Leistungen, die als ein zusammengehöriges Ganzes zu betrachten sind, kurz zusammen, so können wir sagen: durch die erstaunliche Arbeitskraft und Ausdauer dieser beiden Männer wurde ein umfassendes und wirklich brauchbares Tabellenwerk geschaffen, das die Benützung aller 6 trigonometrischen Funktionen ermöglichte, ein Werk, wie man es bisher nicht hatte, und das das Fundament für alle folgenden Tafeln ähnlicher Art wurde, bei deren Herstellung man nur allmählich die Fehler und Ungenauigkeiten zu vermeiden brauchte, die dem hochverdienstlichen Erstlingswerke naturgemäfs anhafteten. Ähnlich wurde die wahrscheinlich von Coppernicus ersonnene, von Rhaeticus und Otho ausgearbeitete stereometrische Methode zur Gewinnung der sphärisch-trigonometrischen Sätze die Basis, auf welcher bis heute die Trigonometrie der Kugel aufgebaut wird. Ein drittes Verdienst der beiden Männer liegt in der systematischen Behandlung der sämtlichen möglichen Fälle und der damit zusammenhängenden mehrdeutigen Lösungen, eine Behandlung, die so erschöpfend ist, dafs Otho am Schlusse seines 5. Buches mit Recht sagen konnte, „er getraue sich zu behaupten, dafs kaum irgend ein Problem oder gar ein Dreiecksfall gefunden werden könne, dessen Lösung das Werk nicht leiste.“ [1])

Diese grofsen Vorzüge hätten das Buch zu einem Markstein in der Geschichte der Trigonometrie gemacht, wenn denselben nicht die unglaubliche Weitläufigkeit und Unübersichtlichkeit und in zweiter Linie die dadurch bedingte Unhandlichkeit der Form so sehr erschwerend gegenübergestanden wären. So aber trat bald das Bedürfnis auf, den umfangreichen Folianten durch Bücher zu ersetzen, die in konziser Darstellung und unter Verwendung der schon von Vieta gegebenen Lehrsätze Anleitung zur Lösung der trigonometrischen Fundamentalaufgaben boten.

§ 9. Bartholomaeus Pitiscus.

Unmittelbar an die Schriften des Rhaeticus und Otho, die im Opus Palatinum zum erstenmale in ihrer vollen Ausdehnung zur

1) A. a. O. 341.

Kenntnis der Gelehrten kamen, schliefsen sich die Arbeiten eines Mannes an, dessen Verdienste um die Ausbreitung trigonometrischer Kenntnisse nicht hoch genug angeschlagen werden können. Es ist dies Bartholomaeus Pitiscus. Geboren zu Schlaun unweit Grünberg in Schlesien im Jahre 1561, war er zuerst Hofkaplan in Breslau, kam dann nach Heidelberg und wurde Lehrer des Kurfürsten Friedrich IV. von der Pfalz und Oberhofprediger; er starb 1613. Obwohl er auch auf theologischem Gebiete viel gearbeitet hat, so lag doch seine eigentliche Begabung auf mathematischem, und fesselte ihn besonders die Trigonometrie. Nach zwei Richtungen hin sind seine Leistungen in diesem Gebiete bedeutend: einmal verbesserte er die Tafeln des Rhaeticus so einschneidend, dafs sie an Genauigkeit nichts mehr zu wünschen übrig liefsen, und dann verfafste er ein vorzügliches systematisches Lehrbuch der Trigonometrie, welches sich der sechs Funktionen bediente. Wir wollen diese doppelte Thätigkeit etwas näher in's Auge fassen.

In der Vorrede zu seinem „Thesaurus mathematicus". Francofurti 1613 in fol. sagt er, er sei von seinem Herrn, Friedrich IV., aufgefordert worden, den Kanon des Opus Palatinum, bei dem sich verschiedene Unrichtigkeiten, namentlich in den Tangenten und Sekanten des ersten und letzten Grades und deren Komplementärfunktionen gezeigt hatten[1]), zu verbessern. Hierzu hatte er aber Sinusse nötig, die für einen gröfseren Radius als 10^{10} berechnet waren, und da er vermutete, dafs im Nachlasse des Rhaeticus sich solche finden würden, so suchte er Einblick in denselben zu gewinnen, was ihm auch gelang, als dieser Nachlafs nach des Otho Tode in die Hände Christmann's übergegangen war. Darin fand er thatsächlich, was er suchte, denn derselbe enthielt noch vier ungedruckte Tabellenwerke des Rhaeticus: 1) einen Kanon der Sinusse von 10 zu 10 Sekunden mit ersten, zweiten und dritten Differenzen für $r = 10^{15}$ berechnet, 2) für denselben Halbmesser die Sinusse aller Sekunden des ersten und letzten Grades mit Angabe der ersten und zweiten Differenzen, 3) einen angefangenen Kanon der Tangenten und Sekanten von 10 zu 10 Sekunden mit ersten und zweiten Unterschieden für $r = 10^{15}$, 4) den ganzen Kanon der 6 Funktionen für

1) Die Zahlen des Opus Palatinum sind in neuerer Zeit von A. Gernerth, Zeitschrift für die österreich. Gymnasien 14. Jahrg. 1863, genau untersucht worden. Derselbe gibt an, dafs er im Hauptkanon unter 97200 Tabulargröfsen 465 Fehler gefunden habe, die nicht in dem beigegebenen Fehlerverzeichnis stehen; aufserdem fand er noch 130 Fehler in den Differenzen. Die letzte Abteilung des Werkes: Tertia Series etc. soll dagegen infolge unzähliger Fehler ganz unbrauchbar sein.

den nämlichen Radius von Minute zu Minute. Aber auch diese, einst mit so unsäglicher Mühe berechneten Tabellen waren zur Verbesserung des Opus Palatinum nicht völlig ausreichend — Pitiscus hatte dazu die Sinusse der ersten Minuten auf sehr viel mehr Stellen nötig und unterzog sich daher der Mühe, alle bis zum 7. Grad auf 20 bis 25 Dezimalstellen zu berechnen, eine Arbeit, die er in erstaunlich kurzer Zeit zustande brachte. Die Korrekturen dieser 6 ersten Grade liefs er unter dem Titel: „G. J. Rhaetici magnus Canon doctrinae triangulorum ad decades secundorum scrupulorum et ad partes 10000000000, recens emendatus à B. Pitisco" eigens drucken; doch sind diese Blätter äufserst selten[1]). Vom siebenten Grade an war eine Korrektur der im Opus Palatinum, wie im Nachlasse des Rhaeticus enthaltenen Tafeln nicht mehr nötig, und so war er denn in den Stand gesetzt, den ganzen Kanon der Sinusse, den Rhaeticus auf 15 Dezimalen berechnet hatte, nach Anbringung seiner Korrekturen und mit Angabe der ersten und zweiten Differenzen zu veröffentlichen.

Die Methoden, deren sich Pitiscus zu seinen Rechnungen bediente, sind in seinem Lehrbuche der Trigonometrie lib. II auseinandergesetzt, bieten aber nur insoferne besonderes Interesse, als sie das von Bürgi herstammende Verfahren zur Lösung der Drei- und Fünfteilungsgleichungen enthalten, das wir schon bei den Arabern fanden. Aufserdem zeigen sie, dafs Pitiscus die damals vorhandene Litteratur vollständig beherrschte, indem er sich keine die Rechnung erleichternde Formel entgehen liefs. So hat denn sein „Thesaurus" folgende Einrichtung bekommen. Er enthält aus dem Nachlasse des Rhaeticus: I) den Kanon der Sinusse von 10 zu 10 Sekunden; ein Grad umfafst 6 Folioseiten, indem auf jeder Seite die Sinusse von 10 Minuten stehen. Die Seiten sind halbbrüchig geteilt, links stehen die Sinusse, rechts die Cosinusse, die Tafel läuft bis 45° vorwärts und zurück, II) eine Tabelle der Sinusse des ersten und letzten Grades durch alle Sekunden und mit Angabe der ersten und zweiten Differenzen; auf jeder Seite stehen die Sinusse und Cosinusse von 60 Sekunden. Selbst berechnet sind III) die Principia sinuum für $r = 10^{25}$, es sind dies die Sinusse der Winkel von 60°, 30°, 10°, 2°, 1°; 20′, 10′, 2′, 1′; 20″, 10″, 2″, und die Sinusse der Hälften derselben. Ferner enthält der Thesaurus noch V) die Sinusse von 10″, 30″, 50″; 1′10″, 1′30″ u. s. w. bis 35′, sowie die ihrer Komplemente auf 22 Dezimalen, damit man sie auf 20 sicher habe und dieser Tabelle sind die Differenzen bis zur 5. incl. zur Prüfung beigegeben.

1) Vgl. hierüber Prony in Mémoires de l'Institut. t. V.

Was die Zuverlässigkeit der berechneten Zahlen anlangt, so hat A. Gernerth a. a. O. nachgewiesen, dafs noch immer im Hauptkanon unter 32400 Tabulargröfsen 110 fehlerhafte sind[1]); aber dennoch besitzen wir kein späteres Werk, das in solchen Dimensionen, wie das vorliegende angelegt, dasselbe an Genauigkeit übertreffen würde, sondern es ist für alle Zukunft die zuverlässigste Quelle zur Berechnung ähnlicher Tafeln geblieben. Dies hat Pitiscus auch vorausgesehen, denn er sagt in seiner Vorrede, sein Thesaurus möge dazu dienen, die verschiedenen Canones zu korrigieren, indem die berechneten Differenzen es ermöglichten, sofort einen zweifelhaften Sinus zu prüfen und den Fehler zu ergeben, was so wichtig sei, dafs er lieber Geld und Gut, als diesen Kanon entbehren wollte, wenn er Mathematiker von Profession wäre.

Weniger wissenschaftlich, als didaktisch Hervorragendes leistete Pitiscus in seinem schon oft erwähnten Lehrbuche der Trigonometrie. Zuerst liefs er 1595 einen Abrifs der sphärischen Trigonometrie als Anhang zu der von seinem Landsmanne und Freunde Scultetus herausgegebenen sphärischen Astronomie erscheinen[2]). Diesen Abrifs erweiterte er nach dem Erscheinen des Opus Palatinum zu einem umfassenden Lehrbuch der gesamten Trigonometrie, das 1599 in Frankfurt, 1600 zu Augsburg erschien und 1608 und 1612 verbessert und erweitert in Frankfurt abermals aufgelegt wurde[3]). Wie rasch das Buch Verbreitung fand, wie sehr es also einem wirklichen Bedürfnisse entgegen kam, beweist, dafs schon 1600 eine englische Übersetzung desselben in London erschien[4]). Auch die Bezeichnung Trigonometrie, die schon in der Vorrede zu der Schrift von 1595 auftritt, scheint von Pitiscus zu stammen, wenigstens läfst sie sich nicht früher nachweisen.

Wir heben aus dem reichen Inhalt des Werkes nur die wichtigsten Dinge heraus, indem wir uns im allgemeinen an die späteren Auflagen, die wesentlich verbessert sind, halten. Im ersten Buche, welches die Vorbereitungen umschliefst, interessiert uns nur der

1) Von diesen 110 Fehlern hat schon Vega in seinen logarithmisch trigonometrischen Tafeln und Formeln von 1783, 22 verbessert, die übrigen 88 verbessert Gernerth a. a. O. 426 – 428. Über die Zuverlässigkeit der Zahlen des Thesaurus vgl. auch noch Delambre, Histoire de l'Astronomie moderne II. 25—28. — 2) Abrahami Sculteti Grünbergensis Silesii sphaericorum libri tres etc. Accessit, de resolutione Triangulorum tractatus brevis et perspicuus B. Pitisci Grünbergensis. Heidelbergae 1595. — Graesse, Trésor des libres rares gibt unter Pitiscus an: Trigonometriae libri V de dimensione triangulorum, Heidelb. 1595 in 8° und Francof. 1599 in 4°. — 3) Die drei letzten Auflagen sind auf der Münchener Hof- und Staatsbibliothek vorhanden und lagen uns zum Vergleiche vor. — 4) Eine weitere erschien daselbst 1614 von Ralphe Hundson.

Satz 51[1]). Wie wir S. 182 sahen, hatte Vieta in seiner Enallage πλευρογωνίκη eine Methode entwickelt, um durch Übergang zum Supplementardreieck oder einem der Nebendreiecke desselben die Polarformeln zu erhalten; Pitiscus aber gebührt das Verdienst, die schwerverständliche Darstellung von Vieta's Methode in der Hauptsache richtig aufgefafst und in jenem Satze die Konstruktion eines solchen reziproken Nebendreiecks zum Supplementardreieck zuerst gezeigt zu haben. $\triangle ABC$ ist das gegebene Dreieck, $\sphericalangle B$ der gröfste Winkel. Man beschreibt Fig. 52 um A, B, C als Pole die gröfsten Kreisbögen $EDLK$, $GLFO$ und $JHKM$. Diese bilden unter anderen das $\triangle LMK$, welches gestattet „die Seiten eines sphärischen Dreiecks mit seinen Winkeln und umgekehrt zu vertauschen, wenn man statt der gröfsten Seite und des gröfsten Winkels ihre Ergänzungen zum Halbkreise nimmt". Man zeigt nämlich leicht, dafs arc. $KL = \sphericalangle A$, arc. $LM = 180^0 - \sphericalangle B$, arc. $KM = \sphericalangle C$; $\sphericalangle L = $ arc. AB, $\sphericalangle M = $ arc. BC und $180^0 - \sphericalangle K = $ arc. AC ist.

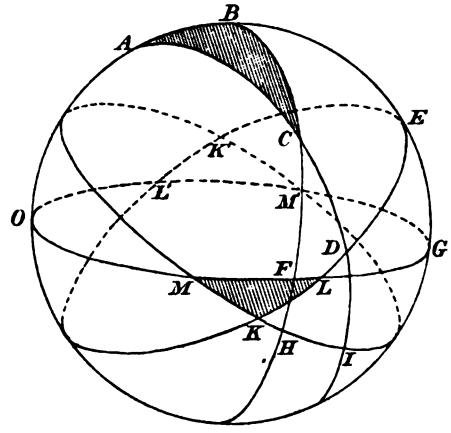


Fig. 53.

Das zweite Buch, in welchem er die geometrische Definition von Sinus, Tangens, Secans und Sinus versus am Kreise gibt (eigene Namen für die Komplementärfunktionen benützt er nicht), ist dazu bestimmt, die Methoden zur Konstruktion des dem Werke angehängten Kanons zu entwickeln und bedient sich, wie schon früher erwähnt, hierzu der algebraischen Methoden Vieta's[2]) und Bürgi's. Aufserdem enthält es die nötigen goniometrischen Formeln. Im dritten Buche folgt die eigentliche Trigonometrie, die mit der Definition der Funktionen im Sinne des Rhaeticus (I. Axiom) eingeleitet wird[3]); drei weitere Axiome umfassen den Sinussatz, Tangenten- und Cosinussatz der Ebene, letzteren noch in zwei Analogien ausgesprochen. Daran schliefsen sich die Anwendungen dieser Sätze auf die verschiedenen Dreiecksfälle, die

1) Aufl. v. 1612. p. 23—24; Aufl. v. 1600. p. 27—28. — 2) Vieta's Canon mathematicus zitiert Pitiscus in Satz XX. — 3) Gerhardt gibt in seiner Geschichte der Mathematik in Deutschland, 94 an, Pitiscus definiere sie als Verhältnisse; seine Definition ist aber genau die des Rhaeticus.

durch zahlreiche numerische Beispiele erläutert werden. Bei Behandlung der sphärischen Dreiecke im 4. Buche werden wieder 4 Axiome vorausgeschickt, zwei für die rechtwinkligen und zwei für die übrigen Dreiecke. Das erste ist die Regel der vier Gröfsen, das zweite der Tangentensatz des Abû'l Wafâ, das dritte der Sinussatz für beliebige Dreiecke und das vierte der Cosinussatz für die Seiten in der prosthaphäretischen Form. Geometrische Beweise verifizieren diese Sätze und zahlreiche numerische Beispiele zeigen ihre Anwendung. Auch wird dargethan, wie man durch Umformung des 4. Axioms mittelst des reziproken Dreiecks die Aufgabe lösen kann, aus zwei Winkeln und der zwischenliegenden Seite die übrigen Stücke zu berechnen. Es scheint dies die erste Stelle zu sein, an welcher der Cosinussatz für die Winkel wirklich bewiesen ist[1]).

Das 5. Buch bildet gewissermafsen einen Anhang praktischer Regeln zur Dreiecksberechnung, indem es in erster Linie die prosthaphäretische Methode auseinandersetzt und die Regula falsi detailliert erläutert. Daran schliefst sich dann ein „Canon triangulorum emendatissimus" an, der die Funktionen Sinus, Tangens und Secans mit ihren komplementären gibt[2]). Derselbe ist sorgfältig berechnet und dadurch für den Gebrauch praktischer als jener des Rhaeticus, dafs er die Bezeichnungen Sinus, Tangens, Secans als Überschriften der Spalten führt, und dafs in den Dezimalbrüchen die Ganzen durch einen Punkt abgetrennt sind.

Dem Lehrbuche sind ferner 11 Bücher[3]) über Anwendungen der Trigonometrie auf Geodäsie, Höhenmessung, Architektur, Geographie, Gnomonik und Astronomie beigegeben, die zeigen, wie hoch man damals den Wert trigonometrischer Rechnungen bereits zu schätzen wufste.

Das Lehrbuch des Pitiscus gehört unzweifelhaft zu den besten, die jemals über Trigonometrie geschrieben wurden. Es zeichnet sich durch eine klare Sprache, präzise Fassung der Sätze, durchsichtige Anordnung des Stoffes und durch handliche Form aus. Die sorgfältig gerechneten Beispiele und der namentlich in den letzten beiden

---

1) Aufl. v. 1600, p. 107; v. 1608, p. 131; v. 1612, p. 145. — 2) In der Aufl. v. 1600 sind diese Funktionen von Minute zu Minute, in den beiden späteren Auflagen in der ersten und letzten Minute des Quadranten für alle Sekunden und für $r = 10^{12}$, für die nächsten 9 Minuten von 2 zu 2 Sekunden und für $r = 10^{10}$ und dann für den Rest von 10 zu 10 Sekunden berechnet. In den übrigen Graden läuft der Kanon von Minute zu Minute mit Angabe der ersten Differenzen pro 10″ und für den Radius 10^5 bis 10^{12}, je nach Bedürfnis. — 3) In der Auflage von 1600 fehlt das Buch mit den Anwendungen auf Architektur.

Auflagen mit grofser Genauigkeit verfafste Kanon erhöhten noch seine Brauchbarkeit. Es darf daher kein Wunder nehmen, dafs dieses Werk auf lange Zeit hinaus die Quelle für alle Schriften ähnlicher Art wurde und vielen Vorlesungen zur Grundlage diente, die damals an deutschen Hochschulen gehalten wurden[1]).

§ 10. Fortschritte der Trigonometrie in den Niederlanden.

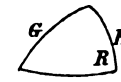
Bei der Ausbildung trigonometrischen Wissens war noch immer die Astronomie das treibende Element gewesen, und namentlich fand das in der Schaffung der grofsen Tabellenwerke sich zeigende Bestreben, die Exaktheit der Rechnung zu erhöhen, seine Begründung hauptsächlich darin, dafs die Astronomen seit dem Auftreten Tycho's und des Landgrafen Wilhelm ihre Beobachtungen mit gesteigerter Schärfe zu machen verstanden. Doch hatten sich in den letzten Jahrzehnten namentlich auch die Methoden der Feldmessung soweit verfeinert, dafs auch die Geodäten der trigonometrischen Tabellen und Lehrbücher nicht mehr entbehren konnten. Diesem Umstande verdankt manche praktisch verwendbare Tafel der trigonometrischen Linien, manche Sammlung einschlägiger Lehrsätze ihre Entstehung.

Unter den Niederländern hatte der bekannte Ludolph van Ceulen in seinem berühmten Buche „Van den Cirkel" 1596 „Tafeln voor de Land-meters" herausgegeben, die für den Radius 10^7 berechnet waren und die Zahlen für die Sinusse, Tangenten und Sekanten[2]) von Minute zu Minute ablesen liefsen. An sie schlossen sich dann die wichtigsten geodätischen Aufgaben an, wie sie später Pitiscus in seinem Lehrbuche in noch gröfserer Vollständigkeit brachte. Aber auch rein theoretische Fragen interessierten Ludolph: so gab er in seinen „Fundamenta arithmetica et geometrica" Lugd. Bat. 1615 aufser algebraischen auch trigonometrische Lösungen geometrischer Aufgaben, ähnlich wie schon Regiomontan gethan hatte.

Wie Ludolph, so hat auch der namentlich in der Geschichte der Mechanik wohlbekannte Simon Stevin (1548—1620)[3]) Tabellen publiziert und eine sehr handliche Abhandlung über Trigonometrie geschrieben, die auch von historischem Standpunkte Interesse verdient. Die „Wiskonstige Gedachtenissen"[4]), die 1608 erschienen

---

1) So findet sich z. B. in der Dresdener kgl. Bibliothek noch eine Vorlesung Jöstel's mit dem Titel: Lectiones in trigonometriam (Bartholomaei) Pitisci. Wittenbergae 1597. C. 2. — Vgl. auch ebenda C. 4. — 2) Die Tangenten heifsen hier Tangentes oder Perpendikel, die Sekanten auch Snijder. — 3) Vgl. über ihn Quetelet, Histoire de science mathématique chez les Belges. Bruxelles 1864. 144—146. — 4) Da die niederländischen Originaldrucke von fast unauf-

und von welchen Willebrord Snellius im selben Jahre eine treue lateinische Übersetzung unter dem Titel „Hypomnemata mathematica" publizierte, waren aus Vorlesungen hervorgegangen, die Stevin seinem Schüler, dem Prinzen Moritz von Nassau, gehalten hatte. Sie umfassen alle Zweige der damals gepflegten mathematischen Disziplinen und ihre Anwendungen und beginnen im ersten Teile mit einer Lehre von den Dreiecken, d. h. einer vollständigen ebenen und sphärischen Trigonometrie. Stevin kannte nicht nur Vieta's trigonometrische Arbeiten[1]), sondern erkannte auch ihren bedeutenden Wert; so nimmt er dessen Formeln zur Berechnung des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks direkt herüber, reduziert sie aber auf jene 6, deren wir uns noch heute bedienen[2]). Sein Verdienst ist es, zum erstenmale ausgesprochen zu haben, dafs diese 6 Formeln zur Lösung aller möglichen Dreiecksfälle vollständig ausreichen. Seine Beweise für diese Sätze schliefsen sich im Wesentlichen an Bressieu an, den er wie den Vieta zitiert[3]). Wie diese Fundamentalsätze zur Lösung der einzelnen Fälle angewendet werden müssen, wird ausführlich erörtert, und am Schlusse ist eine Tafel[4]) beigefügt, welche neben den verschiedenen möglichen Formen der Dreiecke die Nummern der Sätze notiert, mit denen sie zu lösen sind. Dabei wird ein gegebenes Element, das $> 90^0$ ist, mit „G", ein solches $< 90^0$ mit „K" und eines gleich 90^0 mit „R" bezeichnet, so dafs z. B. die Bedeutung der Figur 

unmittelbar ersichtlich ist. Aufserdem ist noch zu bemerken, dafs er zum erstenmale das Quadrantendreieck eigens behandelt und für den Winkelcosinussatz eine einzige Regel[5]) angibt, deren Wortlaut wir durch die beiden Formeln:

$$\sin A \sin B : R^2 = [\text{sinvers}(180^0 - C) - \sin(A - B)] : \text{sinvers}(180^0 - c),$$

$$\sin A \sin B : R^2 = [\text{sinvers}\, C - \text{sinvers}(180^0 - (A + B))] : \sin c$$

genau wiedergeben können[6]).

Bemerkenswert sind noch seine Anwendungen auf Berechnung unregelmäfsiger ebener und sphärischer Polygone: die ersten An-

findbarer Seltenheit sind, so mag hier bemerkt werden, dafs die Münchener Hof- und Staatsbibliothek sowohl von dem zitierten Werke, als auch von noch einigen andern Stevin's solche besitzt.

1) Er zitiert ihn z. B. Hypomnemata p. 61. — 2) Hypomnemata 208—217. — 3) Ebenda 321. — 4) Ebenda 299—303. — 5) Ebenda 222—223. — 6) Den Beweis des Satzes folgert er aus derselben Figur des reziproken Dreiecks wie Pitiscus (Hypomnemata 321) und bemerkt, dafs schon Vieta seine Enallage aus dieser Figur abgeleitet habe.

fänge einer Polygonometrie. Indem er mit den Vierecken beginnt, die er in einfache, überschlagene[1]) und solche mit einspringenden Ecken einteilt, löst er 8 Aufgaben mittelst Zerlegung in Dreiecke, welche er teils durch Ziehen von Diagonalen (erste Methode), teils durch Fällen von Senkrechten (zweite Methode) erhält. Dann kommt er auf Polygone mit beliebiger Seitenzahl (n) zu sprechen, gibt den Fundamentalsatz, dafs zu ihrer Bestimmung $n-3$ Stücke notwendig und hinreichend sind, und lehrt ihre Berechnung, wie bei den Vierecken. In ganz ähnlicher Weise werden die sphärischen Vierecke und Polygone behandelt. Stevin war ein Mann, der den Stoff zu seinen wissenschaftlichen Untersuchungen stets aus der Praxis nahm, und so wird er wohl auf seine theoretische Behandlung der Polygone durch die Erfordernisse der Feldmefskunst geführt worden sein, die sich schon seit Rainer Gemma Frisius (1508—1555)[2]) in den Niederlanden einer besonderen Pflege erfreute.

Ein anderer niederländischer Mathematiker, den wir schon bei Besprechung der Kreismessung antrafen, ist Adriaen Metius (1571—1635). Seine Schriften, die sich auf Arithmetik, Geometrie und Astronomie beziehen, enthalten mehrfach Abhandlungen über Trigonometrie; so die „Doctrinae spericae libri V." Franecker 1598, seine „Arithmetica et geometria nova." 1625 in 4° ebenda erschienen[3]), besonders aber seine „Universae Astronomiae brevis dilucidatio et facilis institutio." Franecker 1605—1608 in 8° und sein „Primum mobile." Amstelodami 1631 in 4°. In den beiden ersten behandelt er kurz die ebene Trigonometrie, in den letzten namentlich die sphärische. Wir konnten uns bei der Durchsicht dieser Schriften überzeugen, dafs Metius die vorhandene Litteratur, namentlich Pitiscus, fleifsig benützte und die notwendigen Sätze in übersichtlicher Form zusammenzustellen suchte — interessante neue Gedanken fanden wir jedoch nicht, man müfste denn als einen solchen seinen Versuch ansehen, anschliefsend an die früher erwähnten graphischen Methoden des Clavius (S. 190—191) zur Lösung sphärischer Dreiecke ein Instrument zu konstruieren, welches mit einiger Genauigkeit solche Lösungen direkt ablesen liefs. Da jedoch die Methode

1) Vgl. hierüber Cantor II. 610, der dieses Viereck Girard (1626) zuteilt. — 2) Vgl. dessen Schrift: Libellus de locorum describendorum ratione, de eorum distantiis inveniendis. 4°. Antwerpen 1553. Daselbst gibt er Methoden zur Triangulation an. Früher (1541) hatte Rhaeticus in seiner Chorographie, die aber nie gedruckt wurde, einen Anfang hierzu gemacht (vgl. Hipler, Zeitschrift für Math. und Phys. 21. 1876. 125 des litterarisch-historischen Tl.). — 3) Das Werk erschien 1626 noch einmal und enthält die ebene Trigonometrie. 89—209, mit einem Kanon der Funktionen von 10 zu 10 Minuten.

keine weitere Verbreitung fand, wollen wir auf sie nicht näher eingehen.

Wir hatten schon früher eines niederländischen Gelehrten gedacht, der zu Vieta in naher wissenschaftlicher Beziehung gestanden hatte und allerdings, wie die Zukunft zeigte, mit Unrecht als ein Rivale desselben betrachtet wurde: Adriaen van Roomen. Auch er versuchte sich auf dem Gebiete der Trigonometrie, indem er 1609 einen „Canon Triangulorum" in 4° erscheinen liefs. Da das eigentümliche Werk viel Aufsehen machte, indem es von einem Manne, der in der Gelehrtenwelt einen bedeutenden Ruf genofs, ausgegangen war, so wollen wir in Kürze darauf eingehen. Schon in der Vorrede wird pomphaft angekündigt, dafs er die 28 Dreiecksfälle, die Rhaeticus in seinem Opus Palatinum, Clavius und andere in ihren Schriften noch behandelten, auf 6 reduziert habe, d. h. er vereinigte die sämtlichen Fälle, die bei den verschiedenen Gattungen rechtwinkliger und schiefwinkliger Dreiecke vorkommen können, in 6 einzelne Probleme und bediente sich zu ihrer Behandlung nur dreier Analogien. Es sind dies der Sinussatz, die beiden Cosinussätze und die beiden Cotangentenformeln. Die letzteren beiden hat er, wie er selbst angibt, Vieta entnommen, glaubte sie aber dadurch wesentlich verbessert zu haben, dafs er sie in eine Gestalt brachte, welche die eine Division ersparen liefs, die Vieta noch nötig hatte. So schrieb er statt der auf S. 182 mitgeteilten Formel des letzteren

$$1 : (\sin b \operatorname{cosec} A) = (\operatorname{ctg} c + \cos A \operatorname{ctg} b) : \operatorname{ctg} C,$$

welche aus jener einfach durch die Substitution $\operatorname{cosec} b \cdot \sin A = \frac{1}{\sin b \operatorname{cosec} A}$ hervorgeht[1]). Ebenso behandelte er die polare Formel Vieta's. Viel wichtiger als diese einfache Umgestaltung wäre es gewesen, wenn er einen Beweis der Analogie mitgeteilt hätte, diesen bleibt er aber ebenso wie Vieta schuldig.

Nicht unerwähnt dürfen wir die Schreibweise lassen, die er bei der Darstellung seiner Regeln anwendet, indem sich darin das Bestreben zeigt, die langatmigen Sätze seiner Vorgänger durch eine Art Formelsprache zu ersetzen. Ein Rechteck bezeichnet er durch Vorsetzen von §, den Sinus durch S, die Tangente, die er nach Vieta Prosinus nennt, durch P und die Sekante oder Transsinuosa durch T. Soll eine Cofunktion dargestellt werden, so fügt er zu diesen Zeichen noch -s bei; die Dreieckswinkel bezeichnet er durch die Buchstaben ihrer Scheitel.

---

1) Diesen Gedanken teilte ihm übrigens Magini mit. Favaro, Carteggio 440.

In dieser Schreibweise lautet die oben mitgeteilte Gleichung[1]): Ut quadratum Radii ad § sub $S \cdot AB$ & $T \cdot \sigma\varepsilon A$,

$$\text{Ita § sub } P \cdot \sigma\varepsilon \begin{cases} AC \text{ \& Radio} \\ AB \text{ \& } S\sigma\varepsilon A \end{cases} \text{ ad § sub Radio \& } \begin{cases} \text{Efficiente} \\ \text{Prosinus } \sigma\varepsilon B \end{cases} \text{Coefficiente.}$$

Vieta hatte kurz und bündig angegeben, wie die Vorzeichen in seinen Formeln sich ändern, je nachdem die Winkel und Seiten der Dreiecke, auf die sie angewendet werden, beschaffen sind. Van Roomen dagegen setzt den Anwendungen seiner Formeln eine Sammlung von nicht weniger als 59 Figuren auf 30 Seiten voraus, in denen er die verschiedenen Gattungen von Kugeldreiecken in Orthogonalprojektion auf die Meridianebene darstellt. Auf diese schematischen Figuren, denen berechnete Zahlenbeispiele angeschrieben sind, wird dann bei Angabe der verschiedenen Modifikationen, die die Regeln erleiden, verwiesen.

Das bisher Geschilderte ist im zweiten Buche von Roomen's Werk enthalten; im ersten findet sich die Berechnung eines Kanons der Sinusse, Prosinusse und Transsinuosen von 0^0 bis 90^0 durch 10 Minuten fortschreitend für den Radius 10^9. Hierbei sind die „Fundamentalsinusse" von 6^0, 10^0, 15^0, 18^0, 42^0, 66^0, 70^0, 78^0 und verschiedener Vielfachen derselben auf 35 Dezimalen bestimmt. Ihre Berechnung wird durch die regulären Polygone erhalten und in Tabellen algebraisch dargestellt; z. B. $\sin 6^0 = R\text{trin.}9 - R5 - R\text{bin}30 + R180$, d. h. $\sqrt{9 - \sqrt{5} - \sqrt{30 + \sqrt{180}}}$. Hierzu hatte er ja in seinen „Ideae mathematicae" (siehe S. 173—174) genügende Vorbereitungen gemacht. Da er aber wohl wufste, dafs ein Kanon, der nur nach 10 Minuten fortschreitet, für Anwendungen der Trigonometrie nicht genügt, so hängte er seinem Buche die uns längst bekannten Tabellen des Clavius an, mit welchem er in sehr freundschaftlichen Beziehungen gestanden zu sein scheint.

Das Werk besitzt noch einen Anhang mit dem Titel „Anacephaleosis seu compendium generale sex praemissorum problematum", das in seiner Eigentümlichkeit unmittelbar an Torporley's Schrift erinnert. Indem nämlich Romanus hier eine Reihe schwer verständlicher Definitionen und Neubezeichnungen vorausschickt, bemüht er sich, mit Hilfe derselben die Lösungen sämtlicher trigonometrischer Fälle in eine einzige Regel zusammenzudrängen, die in 4 Memorialversen abgefafst ist. Die Anfangsbuchstaben eines jeden Wortes

1) A. a. O. 230: Die Abkürzung S für Sinus findet sich übrigens auch in den Handschriften von Jöstel (S. 197, Anm. 4) und Praetorius (S. 212, Anm. 1).

dieser völlig unsinnigen Verse bedeuten seine Zeichen für die trigonometrischen Funktionen. Da es jedoch nicht möglich ist, die Bedeutung derselben in einigermafsen knapper Form darzustellen, und trotz der selbstgefälligen Anpreisung dieses „neuen Verfahrens" in der Folgezeit niemand auf dasselbe zurückkam, wollen wir nicht weiter darauf eingehen.

Fassen wir unser Gesamturteil über die trigonometrischen Leistungen des in seiner Zeit so angesehenen Mannes zusammen, so müssen wir sagen, dafs dieselben in wissenschaftlicher Beziehung wirklich Neues nicht boten, dafs ihm jedoch insoferne nicht alles Verdienst abzusprechen ist, als er die Wichtigkeit der drei Hauptgleichungen betont und zeigt, wie mit ihrer Hilfe allein die sämtlichen Probleme der Dreiecksberechnung in der sphärischen Trigonometrie gelöst werden können. Allerdings war das ja alles schon durch Vieta's Thätigkeit vorbereitet, so dafs der Titel eines Reformators der Trigonometrie, der ihm von anderer Seite zugeteilt wurde, keineswegs berechtigt erscheint.

§ 11. Giovanni Antonio Magini.

In engem Verkehre mit den in den letzten Paragraphen angeführten Mathematikern und Astronomen, namentlich auch mit dem eben besprochenen Adrian van Roomen stand der Italiener Giovanni Antonio Magini, welchem wir schon wiederholt begegneten. Die S. 191 erwähnte trigonometrische Schrift desselben war die Vorläuferin eines umfassenden Werkes, das zu den gelesensten und von den Astronomen am meisten gebrauchten litterarischen Erzeugnissen jener Zeit gehörte. Wir meinen das „Primum mobile duodecim libris contentum", welches zu Bologna 1609 in fol. erschien, nachdem schon fünf Jahre früher zu Venedig eine Sammlung der von Maginus neukonstruierten trigonometrischen Tafeln mit Gebrauchsanweisung unter dem Titel „Tabulae primi mobilis, quas directorium vulgo dicunt" (in fol. mit einer Widmung an Kaiser Rudolph II.) herausgekommen war. Da uns ein Vergleich der beiden Schriften zeigt, dafs das spätere Werk eine umfassende Ausarbeitung der in dem früheren teilweise nur angedeuteten Lehren bildet, so wollen wir jenes genauer besprechen.

Obgleich dasselbe ein umfangreicher Foliant ist, so ist doch der reiche Inhalt so vorzüglich gegliedert, dafs er sich unschwer übersehen läfst. Im ersten Buche entwickelt Magini die Hauptsätze, deren er sich zur Lösung der Fundamentalaufgaben bedient, indem er vier Gesichtspunkte voranstellt (fol. 12^r ff.), die ihm zur Beweis-

führung und Ableitung dienen. Der erste ist die Ergänzung der Dreiecksseiten zu Quadranten, der zweite die Ergänzung zum Halbkreis, der dritte die Bildung jenes Nebendreieckes zum Supplementardreieck, das wir bei Vieta und Pitiscus kennen lernten — diese Methode nennt er „commutatio trianguli“ — und der vierte die Reduktion des schiefwinkeligen Dreiecks auf das rechtwinkelige durch Fällung eines senkrechten Bogens. Hieran schliefsen sich die bekannten 6 Theoreme des rechtwinkeligen Dreiecks, die er aber durch Umschreiben in der bei Vieta näher geschilderten Weise auf die Zahl 32 bringt, indem er stets darauf ausgeht, die Divisionen zu vermeiden. Dabei berührt der konsequente Gebrauch von „sinus secundus“, „tangens secunda“ und „secans secunda“ für cosinus, cotangens und cosecans angenehm. Im 33. Theorem gibt er an Clavius anschliefsend die prosthaphäretischen Formeln für das rechtwinkelige Dreieck, und hieran schliefsen sich der Sinussatz und die beiden Cosinussätze für das schiefwinkelige.

Auf diese Sätze, sowie noch einige andere, die bei Zerspaltung eines schiefwinkeligen Dreiecks in 2 rechtwinkelige auftreten und die teils bei Regiomontan, teils bei Vieta schon vorkommen, basiert er seine Behandlung der sphärischen Dreiecke in den folgenden Büchern. Hierbei unterscheidet er vier Methoden, die in jedem Falle in Anwendung kommen und mit zahlreichen Beispielen belegt werden: 1) Behandlung der Fälle mit alleiniger Benützung der Sinusse und Cosinusse, 2) mit Anwendung aller Funktionen, 3) mit der Prosthaphäresis der Sinusse, 4) mit den von ihm konstruierten Tafeln, worunter die „Generalis Tabula“ den ersten Platz einnimmt und für sich zur Lösung aller Aufgaben genügt. Diese letztere Methode allein war also neu. Magini hat hierzu im Ganzen vier Tafeln geschaffen nach Analogie der Tabula primi mobilis von Regiomontan, und ihre Berechnung beweist eine ganz enorme Arbeitskraft und Ausdauer [1]). Sämtliche vier Tafeln haben doppelten Eingang. Die erste entspricht genau der Tafel Regiomontan's und leistet somit die direkte Berechnung des Sinus oder Cosinus eines Winkels aus dem Produkte zweier dieser Funktionen. Sie ist übrigens so eingerichtet, dafs man die Cofunktionen direkt ablesen kann, indem die komplementären Winkel einerseits auf der rechten Seite von unten nach oben, andererseits in der untersten Zeile von rechts nach links

1) In der ersten Veröffentlichung von 1604 sind diese 4 Tafeln nur für ganze Grade berechnet, während in der Ausgabe von 1609 die Tabula generalis von 10 zu 10 Minuten fortschreitet. Da Magini seine Zahlen schon 1600 hatte, wie aus einem Briefe an Tycho vom 4. März d. J. hervorgeht, so scheint er zuerst auf Publikationsschwierigkeiten gestofsen zu sein (A. Favaro, Carteggio 234).

laufen. Man macht sich einen Begriff von der zur Herstellung dieser einzigen Tafel nötigen Rechnungsarbeit, wenn man beachtet, dafs dieselbe 274 Folioseiten umfafst, auf deren jeder 10 Grade mit 10 Minuten Einteilung in 60 Zeilen stehen. Übrigens wäre diese Tafel noch umfangreicher geworden, wenn Magini nicht von der Möglichkeit einer Kürzung Gebrauch gemacht hätte, die darin liegt, dafs es gleichgiltig ist, ob man zur Berechnung von $\sin x = \sin\alpha \sin\beta$ α und β oben (frontaliter) oder seitwärts (lateraliter) abliest[1]). Magini hebt hervor, dafs mit dieser Tafel allein alle Fragen über sphärische Dreiecke gelöst werden können und weist dies später eingehend nach, doch wird ihr Gebrauch durch die notwendig werdenden Interpolationen dann wesentlich erschwert, wenn man α oder β aus der Arealzahl x zu berechnen hat, deshalb schuf er seine zweite Tafel, die er allerdings nur mehr auf Grade berechnete.

Diese zweite Tabelle dient nämlich dazu, den Sinus eines Winkels x aus dem Produkt eines Sinus oder Cosinus mit einer Sekante oder Cosekante zu berechnen, ersetzt also die Aufsuchung der Lateral- oder Frontalzahlen aus den Arealzahlen der ersten Tafel. Die Winkel der Sinusse laufen links von oben nach unten, die der Cosinusse rechts von unten nach oben, die Winkel der Sekanten aber müssen in der obersten Horizontalzeile, die der Cosekanten in der untersten abgelesen werden. Somit können mit diesen zwei Tabellen alle Aufgaben durch ein einmaliges Aufschlagen erledigt werden, für welche die Verwendung der drei Fundamentalformeln $\sin a = \sin c \sin A$, $\cos c = \cos a \cos b$, $\cos A = \cos a \sin B$ und der aus ihnen durch Auflösung nach den einzelnen rechts stehenden Faktoren hervorgehenden Analogien genügt, d. h. überhaupt alle möglichen Fälle.

Die beiden noch übrigen ebenfalls für ganze Winkelgrade berechneten Tafeln dienten zur direkten Benützung der drei weiteren Analogien: $\operatorname{tg} a = \sin b \operatorname{tg} A$, $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos A$, $\cos c = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B$ und jenen, die durch Umstellung aus ihnen hervorgehen. Zu diesem Zwecke hatte man in der dritten Tafel in der Spalte links die Winkel der Tangenten, oben horizontal die der Sinusse, rechts und unten dagegen die Winkel der bezüglichen Komplementärfunktionen abzulesen und erhielt als Arealzahl den Winkel der entsprechenden Tangente. In der vierten Tafel endlich, die schon Reinhold in seinen Tabulae directionum berechnet hatte, stehen sowohl links als

1) Der Tabula generalis ist noch eine Proportionaltafel beigegeben, welche wie die Haupttafel eingerichtet, links die Minuten von 1 bis 60 und in der obersten Zeile die Sekunden der ersten 10 Minuten von 2 zu 2 fortschreitend enthält.

oben die Winkel der Tangenten und als Arealzahlen die Winkel der Sinusse; auch hier können die Komplemente rechts und unten abgelesen werden.

Die „Tabula generalis“ fand bei den Astronomen viel Anklang, namentlich sprach sich van Roomen in einem Schreiben an Magini darüber sehr anerkennend aus[1]) und veranlafste durch seinen Brief die Entstehung der 3. und 4. Tafel.

Die beschriebenen vier Tafeln gestatteten aber die Lösung sämtlicher Dreiecksaufgaben nur, wenn man die schiefwinkligen Dreiecke in rechtwinklige zerlegte, um aber auch die übrigen von Magini angegebenen Methoden verwenden zu können, war ein umfassender Kanon der trigonometrischen Funktionen, ähnlich dem des Rhaeticus notwendig, und auch diesen hat Maginus erstellt und seinem Werke beigegeben.

Der „Magnus Canon trigonometricus“, wie er ihn nennt, läuft durch alle Minuten des Quadranten und ist zur direkten Ablesung der Cofunktionen eingerichtet. Er wird in 4 Ordines eingeteilt. Die erste Ordnung umfafst zwei Kolumnen, in der ersten stehen die Sinusse, in der zweiten die Bögen derjenigen Sinusse, die den 10. Teil der nebenstehenden betragen. Ebenso besteht die zweite Ordnung aus 2 Kolumnen: die erste enthält die Sinusversus, die zweite die Bögen, welche jenen entsprechen, wenn man sie als Sinusse auffafst, z. B. sinvers $68^0 = 62539{,}34 = \sin 38^0\,42'\,40''$. Die dritte Ordnung umfafst drei Kolumnen: 1) Tangenten, 2) Bögen, welche zum 10. Teile einer jeden Tangente, diese als Sinus betrachtet, gehören, 3) Bögen, welche den Tangenten selbst, diese als Sinusse aufgefafst, entsprechen. Die vierte Ordnung besteht wieder aus zwei Kolumnen: in der ersten sind die Sekanten, in der zweiten die Bögen angegeben, die zu den zehnten Teilen jener, dieselben als Sinusse aufgefafst, gehören. Der zugrunde gelegte Sinus totus ist 10^7, und nach der fünften Stelle ist ein Komma angebracht, um die Tafel leichter als fünfstellige benützen zu können. Beistehend folgt eine Probe der Anordnung dieses Kanons.

	I. Ordo		II. Ordo		III. Ordo			IIII. Ordo		
	Sinus rectus	Arcus P. M. S.	Sinus versus	Arcus P. M. S.	Tangens	Arcus I P. M. S.	Arcus II P. M. S.	Secans	Arcus P. M. S.	
11	19080,91	1 5 36	1837,28	1 3 10	19438,03	1 6 50	11 12 31	101871,66	5 50 48	60
1	19109,45	1 5 42	1842,84	1 3 21	19468,22	1 6 56	11 13 35	101877,43	5 50 50	57
2	. . . . .	. . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	58
3	. . . . .	. . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	57

1) Favaro, Carteggio 225. Nr. XXIV

Diese eigentümliche Vervollständigung der sonst gebräuchlichen trigonometrischen Tafeln hatte darin ihre Begründung, dafs sie in dieser Form direkt zur Anwendung der prosthaphäretischen Formeln auf die Funktionen Tangens und Secans verwendbar wurden, und aufserdem die Sinus versus direkt aufgeschlagen werden konnten, die in jenen damals immer noch gebräuchlichen Formen der Cosinussätze vorkamen[1]).

Die übrigen 8 Bücher des Primum mobile bieten für uns kein direktes Interesse, da sie astronomischen und geographischen Fragen gewidmet sind, auf welche die mitgeteilten trigonometrischen Lehren angewendet werden. Zu bemerken ist nur noch, dafs Magini trotz der reichen trigonometrischen Hilfsmittel, die er sich voraus entwickelt hat, noch eine ganze Reihe von Fragen auch mit der Projektionsmethode des Analemmas löst, die sich ihrer Anschaulichkeit wegen noch immer des Beifalls der Astronomen erfreute.

Überblickt man Magini's Thätigkeit, so tritt uns aus ihr weniger das Bild eines mit bahnbrechenden neuen Gedanken begabten Mathematikers als das eines erstaunlich fleifsigen Astronomen hervor, der mit bewunderungswürdiger Zähigkeit die nötigen Hilfsmittel sich selbst verschafft und dabei überall den praktischen Zweck im Auge hat, die mannigfaltigen Rechnungen, die sein Beruf mit sich bringt, in der denkbar einfachsten Weise zu gestalten[2]). Dabei wufste er sich umfassende Kenntnisse der vorhandenen Litteratur anzueignen und hat namentlich die Schriften Vieta's, dessen Gröfse er gern anerkennt, wohl verstanden und zu würdigen gewufst. So hat er denn Italien in seinem Primum mobile ein Werk geschenkt, wie es vorher und Jahrzehnte lang nachher keines in der Geschichte der Trigonometrie aufzuweisen hat.

Mit Magini sind wir an der Schwelle der neuen Zeit angelangt, die für unsere Wissenschaft mit der Erfindung der Logarithmen beginnt, jenes Recheninstrumentes, welches berufen war, die ganze trigonometrische Methode von Grund aus umzugestalten. Im Jahre 1614 war es, als die erste Kunde von Neper's genialer Entdeckung in die Öffentlichkeit drang, und wir werden sehen, dafs sie sich für

---

1) Hatte man z. B. x zu berechnen aus $10^7 : \sin 24° = \operatorname{tg} 36° : x$, so suchte man $\operatorname{tg} 36°$ in der III. Ordnung auf, dabei stand in der 2. Kolumne $46°35'50''$, d. h. $\operatorname{tg} 36° = \sin 46°35'50''$, also hatte man jetzt $x = \frac{\sin 24° \cdot \sin 46°35'50''}{10^7}$ $= \frac{1}{2}\{\cos 22°35'50'' - \cos 70°35'50''\} : 10^7$, wodurch die Multiplikation erspart blieb. — 2) Kepler schätzte ihn so hoch, dafs er ihn bat nach Deutschland zu kommen und ihm bei Berechnung der Rudolphinischen Tafeln behilflich zu sein. Libri Histoire des sciences math. en Italie IV. 44.

jene Zeit verhältnismäfsig rasch über das ganze gelehrte Abendland ausbreitete. Dennoch gab es bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts noch immer einzelne Mathematiker und Astronomen, welche aus verschiedenen Gründen der neuen Methode abhold, in jener älteren Richtung weiterarbeiteten, die wir in den vorhergehenden Paragraphen darzustellen versuchten. Es scheint uns daher am Platze, der zeitlichen Aufeinanderfolge vorgreifend, ihre Leistungen als der älteren Periode angehörig im Zusammenhange mit dem Vorhergehenden, in dem sie ihre Wurzeln haben, darzustellen, bevor wir die Entwickelung der logarithmischen Trigonometrie einer Besprechung unterziehen.

§ 12. Ausbau der Trigonometrie im 17. Jahrhundert auf Grund der älteren Methoden.

Schon früher erwähnten wir die „Theoria lunae" des Heidelberger Professors Jacob Christmann (1554—1630), welche 1611 erschienen war und uns bei Ermittelung des eigentlichen Erfinders der Prosthaphäresis so vorzügliche Dienste erwies. In diesem Werke gab sein Verfasser aber nicht nur historische Notizen über jene Methode, sondern auch eine vollständige Entwickelung derselben, sowie die wichtigsten Sätze aus der Dreieckslehre, deren er bedurfte. Diese hatte er übrigens schon in einer früheren Schrift vom Jahre 1601 zusammengestellt, die den Titel „Observationum solarium libri tres" führte, und in einer weiteren kleinen Schrift „Nodus Gordius ex doctrina sinuum explicatus" von 1612 lehrte er, geometrische Aufgaben, die man bisher algebraisch behandelt hatte, mit Verwendung der Sinusse lösen. Aufserdem ist aus jener Zeit, die der Erfindung der Logarithmen unmittelbar vorhergeht, noch eine treffliche[1]) Zusammenstellung der damals bekannten Methoden, die „Synopsis trigonometriae", Dantisci 1612 von Peter Crüger zu nennen, dem wir später wieder begegnen werden. Weiter erschienen auch damals noch Tafeln für die trigonometrischen Funktionen in nicht geringer Zahl. So hatte in Deutschland Mathias Bernegger (1582—1640), Professor der Geschichte und der Beredsamkeit in Strafsburg, eine Sinustafel veröffentlicht, die 1619 wieder aufgelegt wurde; Johann Praetorius[2]) (Richter) (1537—1616) verfafste ungefähr um dieselbe Zeit

1) Vgl. Wolf, H. A. I. 179. — 2) Vgl. die Einleitung Schwendter's zu der 1628 in Nürnberg erschienenen Uebersetzung von Stevin's Berechnung der Sinustafeln. „Kurzer, doch gründlicher Bericht von Calculation der Tabularum Sinuum, Tangentium, Secantium." In dem schon mehrfach zitierten handschriftlichen Codex l. m. 24101 des Praetorius findet sich eine übersichtliche Zusammenstellung aller damals bekannten Hilfsmittel zur Berechnung eines all-

zwei Tafeln für die Radien 10^6 und 10^7 zu privatem Gebrauch, weil des Rhaeticus' Kanon zu grofs war, und Daniel Schwendter (1585—1636), 1608 Professor der orientalischen Sprachen und dann der Mathematik in Altdorf, Praetorius' Freund, gab noch 1628 Stevin's Sinustafel mit deutscher Einleitung heraus.

Auch in den Niederlanden, wo der Einfluſs von Stevin's Werken fortwirkte, erschienen noch vielfach Schriften, welche der älteren Richtung angehörten. Namentlich waren es zwei Männer, die sich, trotzdem sie einen hervorragenden Platz in der Geschichte unserer Wissenschaft einnehmen, mit den Logarithmen nicht mehr vertraut machten. Es sind dies Albert Girard und Willebrord Snellius, von denen der erstere eine französische Ausgabe von Stevin's Werken besorgte, der letztere einige Schriften desselben in's Lateinische übersetzte. Auf ihre Leistungen müssen wir etwas näher eingehen.

Albert Girard war französischer Abstammung[1]), lebte aber von 1625 bis 1633 in den Niederlanden, in welchem Jahre er daselbst starb. Zwei Schriften von ihm sind für uns von Interesse; die erste führt den Titel „Tables des sinus, tangents, secants selon le raid de 100000 parties. Avec un traité succinct de la Trigonométrie." A la Haye 1626. 8^0 und erschien 1629 in einer 2. Auflage in holländischer Sprache. Hier sind die trigonometrischen Linien für alle Winkelminuten auf 5 Dezimalen berechnet. In der Anleitung zur Trigonometrie ist die Schreibweise seiner Sätze bemerkenswert; er führt nämlich ähnlich, wie es schon Stevin gethan hatte, abkürzende Bezeichnungen für die Seiten eines Dreiecks ein, indem er die Hypotenuse eines rechtwinkligen mit H, die senkrechte Kathete mit P, die Basis mit B, den Winkel an der Spitze mit A, den zwischen Basis und Hypotenuse mit V bezeichnet. Hieran anschliefsend stellt er dann die 6 Fälle des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks tabellarisch zusammen, z. B. wenn H und A gegeben ist:

---

gemeinen Kanons, wobei die Erfinder angegeben werden. Wir heben nur die Formel $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = \sec\alpha$ hervor, welche benützt wird, um die Hypotenusen der zweiten Serie, welche zu Winkeln $< 45^0$ gehören und die der dritten Serie für Winkel $> 45^0$ zu berechnen. Dieses Theorem, das Praetorius geometrisch beweist, stammt von Schuler. — Auch führt Praetorius in dieser Abhandlung die sämtlichen prosthaphäretischen Sätze an und leitet sie auf die gewöhnliche Weise ab.

1) Girard's Geburtsjahr ist unbekannt, doch hat P. Tannery (Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Serie II. VII. 1883. 358—360) nachgewiesen, dafs er in San-Michiel in Lothringen geboren ist. Wahrscheinlich hat er sich infolge der Hugenottenverfolgung nach den Niederlanden geflüchtet.

Rad.		tan.	tan.
	a	H	P
	sec.	tan.	tan.
	H	a	V

d. h. Rad. : $\cos A = \operatorname{tg} H : \operatorname{tg} P$ und Rad. : $\sec. H = \operatorname{ctg} A : \operatorname{tg} V$, die Komplemente der Stücke werden also mit kleinen Buchstaben bezeichnet; die Funktion Sinus wird überhaupt nicht geschrieben. Bei Behandlung der schiefwinkligen sphärischen Dreiecke, deren Seiten er mit A, B, D, die Komplemente mit a, b, d bezeichnet, finden sich sogar schon Formeln geschrieben. So gibt er, um aus drei Seiten einen Winkel zu berechnen, für die Hälfte des Sinus versus des der Seite D gegenüberliegenden Winkels die Formel an:

$$\frac{(A+b)-(d)}{(A+b)-(b-A)},$$

d. h. wenn wir diesen Winkel mit γ bezeichnen:

$$\frac{1}{2}\operatorname{sinvers}\gamma = \frac{\sin(A+90^0-B)-\sin(90^0-D)}{\sin(A+90^0-B)-\sin(90^0-B-A)}.$$

Es macht sich also hier zum erstenmale das Bedürfnis fühlbar, statt der weitläufigen Sätze eine abkürzende Formelsprache einzuführen, wie man sie in der Algebra schon seit Vieta gebrauchte; wohl war es nur die wenig praktische Wahl dieser Bezeichnung, die hierin Girard zunächst keine Nachfolger finden liefs.

Es wären hier noch verschiedene elegante Lösungen geometrischer Aufgaben zu erwähnen, die Girard in diesem kleinen Büchlein gibt, doch wir eilen zu seinem zweiten Werke, der „Invention nouvelle en l'Algèbre". Amsterdam 1629. 4^0 [1]), in welchem er, sowie in einem eigenen Schriftchen „Livret des superficies de triangles et polygones sphèriques" [2]) in 4^0, das in demselben Jahre in Amsterdam erschien, zum erstenmale den Ausdruck für die Flächenformel des sphärischen Dreiecks und der sphärischen Polygone mitteilte. Sein Satz lautet: „Jedes sphärische Polygon, welches aus Bögen gröfster Kreise besteht, enthält soviele Flächengrade, als die Zahl angibt, um welche die Summe seiner

---

1) Bierens de Haan hat die äufserst seltene Schrift 1884 in Leyden wieder neu herausgegeben. Ein Auszug findet sich in Nouvelles Annales. Bulletin de Bibliogr. d'hist. et de biogr. math. par Terquem. XIV. 1858. 146 ff. — 2) In seiner Ausgabe der Werke Stevin's sagt er p. 51: „J'ay aussi escrit un livret des superficies des triangles et polygones sphèriques incognues auparavent . . . Je l'ay fait imprimer à Amsterdam en l'an 1629 en quarto."

Innenwinkel die Summe der Innenwinkel eines geradlinigen Polygons von gleicher Seitenzahl übertrifft, wenn die Oberfläche der Kugel 720° gesetzt wird." Er versuchte für diesen Satz einen Beweis zu erbringen, aber es gelang ihm, wie er selbst sagt, vorerst nur, einen Induktionsschluſs zu begründen[1]), einen exakten Beweis hoffte er später nachliefern zu können. Ob dies geschehen ist, ist uns unbekannt, scheint aber nicht wahrscheinlich. Einen solchen lieferte 1632 der Italiener Cavalieri, den wir später wieder treffen werden.

Von gröſserer Bedeutung als Girard war der Niederländer Willebrord Snellius: die Geschichte der Physik kennt ihn als Entdecker des Brechungsgesetzes, die Geschichte der Mathematik als einen geistreichen Geometer. Er wurde 1581 geboren, machte weite Reisen in Deutschland, der Schweiz und Frankreich und lernte zu Würzburg Adrian van Roomen und in Prag Tycho Brahe und Kepler kennen, 1613 wurde er als Nachfolger seines Vaters Rudolf Professor an der Leydener Universität und starb 1626[2]). Er war für seine Zeit sehr vielseitig und ein sowohl theoretisch als praktisch tüchtig geschulter Mathematiker. Von den gediegenen Werken, die er in der kurzen Zeit seines Lebens schrieb, interessieren uns namentlich drei, sein „Eratosthenes Batavus. De terrae ambitus vera quantitate." Lugd. Batav. 1614 in 4°, sein „Cyclometricus. De circuli dimensione", ebenda 1621 in 4° und endlich seine „Doctrinae triangulorum canonicae libri quatuor", welche sein Schüler und Freund Martinus Hortensius im Jahre nach des Autors Tode 1627 in 8° herausgab.

Die letztere für uns wichtigste Schrift ist ein Lehrbuch der Trigonometrie, welches, was übersichtliche Anordnung des Stoffes anlangt, kaum das Werk des Pitiscus erreicht, dagegen mehrere wichtige neue Gedankeu enthält, die wir nicht übergehen dürfen. Snellius beginnt, wie es damals in den Werken üblich war, die sich der Logarithmen noch nicht bedienten, mit der Auseinandersetzung der Regeln zur Bildung einer Sinustafel, welche er selbst noch 1626 publiziert hatte. Bei ihrer Berechnung ist er aber nicht den gewöhnlichen Weg gegangen, sondern er entwickelte sich mehrere Formeln, die ihm gestatteten, die Sinusse auf einige Dezimalen zu berechnen und dann sofort durch bloſse Addition aus diesen ihre Werte auf beliebig viele Stellen abzuleiten. Wir wollen hier die

---

1) Sein Beweis ist in dem zitierten Auszug von Terquem vollständig mitgeteilt. — 2) Genaueres bei van Geer in Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles XVIII. 455 ff. und bei Cantor II. 602.

wichtigsten in unserer Schreibweise zusammenstellen. In Propositio II. p. 41 gibt er den allgemeinen Wortlaut der Formel:

$$1 : \sin\tfrac{\alpha}{2} = 2\sin(90^0 - \alpha) : \left[\sin\tfrac{3\alpha}{2} - \sin\tfrac{\alpha}{2}\right]$$
$$= 2\sin(90^0 - 2\alpha) : \left[\sin\tfrac{5\alpha}{2} - \sin\tfrac{3\alpha}{2}\right]$$
$$= \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$= 2\sin(90^0 - n\alpha) : \left[\sin\tfrac{(2n+1)\alpha}{2} - \sin\tfrac{(2n-1)\alpha}{2}\right].$$

Hieraus folgert er, dafs wenn man $\sin(90^0 - \alpha)$, $\sin(90^0 - 2\alpha)\cdots$ und $\sin\frac{\alpha}{2}$ kennt, die Sinusse von $\frac{3\alpha}{2}$, $\frac{5\alpha}{2}\cdots$ nur durch successive Addition und Multiplikation des Schlufsresultates mit $2\sin\frac{\alpha}{2}$ gefunden werden können; dies ist in der That richtig, denn aus den obigen Formeln ergibt sich (Propositio III. p. 44) die wichtige Gleichung[1]):

$$\sin\left(\tfrac{2n+1}{2}\alpha\right) = 2\sin\tfrac{\alpha}{2}\left\{\tfrac{1}{2} + \sin(90^0 - \alpha) + \sin(90^0 - 2\alpha) + \cdots + \sin(90^0 - n\alpha)\right\}.$$

Ähnlich erhält er in Prop. IV eine Regel, die durch die Gleichung

$$\sin n\alpha = 2\sin\tfrac{\alpha}{2}\left\{\sin\left(90^0 - \tfrac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(90^0 - \tfrac{3\alpha}{2}\right) + \cdots + \sin\left(90^0 - \tfrac{2n-1}{2}\alpha\right)\right\}$$

dargestellt wird. Den eigentümlichen Gebrauch, den er von diesen beiden Formeln zur Berechnung seiner Sinustafel machte, wollen wir an einem von ihm gegebenen Beispiele erläutern. Es sei bekannt: $\sin\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin 82^0 30' = 0{,}9914449$, $\sin\left(90^0 - \frac{3\alpha}{2}\right) = \sin 67^0 30' = 0{,}9238795$, $\sin\left(90^0 - \frac{5\alpha}{2}\right) = \sin 52^0 30' = 0{,}7933533$, $\sin\left(90^0 - \frac{7\alpha}{2}\right) = \sin 37^0 30' = 0{,}6087614$, $\sin\left(90^0 - \frac{9\alpha}{2}\right) = \sin 22^0 30' = 0{,}3826834$ $\sin\left(90^0 - \frac{11\alpha}{2}\right) = \sin 7^0 30' = 0{,}1305262$, dann folgt nach Prop. IV, indem man immer den nächsten dieser Sinusse zur Summe aller vorhergehenden addiert, und $2\sin\frac{\alpha}{2} = R$ schreibt:

$$\sin 15^0 = 0{,}9914449 \cdot R\left[= \sin\alpha = R\sin\left(90^0 - \tfrac{\alpha}{2}\right)\right],$$

$$\sin 30^0 = 1{,}9153244 \cdot R\left[= \sin 2\alpha = R\left(\sin\left(90^0 - \tfrac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(90^0 - \tfrac{3\alpha}{2}\right)\right)\right],$$

1) Diese Formel ist wenig verschieden von jener Bramers. Vgl. Seite 211, Anmerk. 1.

$$\sin 45^0 = 2{,}7086777 \cdot R [= \sin 3\alpha = \text{etc.}],$$
$$\sin 60^0 = 3{,}3174391 \cdot R [= \sin 4\alpha = \text{etc.}],$$
$$\sin 75^0 = 3{,}7001225 \cdot R [= \sin 5\alpha = \text{etc.}],$$
$$\sin 90^0 = 3{,}8306487 \cdot R = R' [= \sin 6\alpha = \text{etc.}].$$

Wendet man jetzt Prop. III an, so erhält man zunächst $\sin 7^0 30' = 1{,}91532444 \cdot R^2 \left(= \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cdot R'\right)$, und die übrigen werden gefunden, indem man zu diesem Werte nach einander die vorigen Sinuswerte von $\sin 75^0$ aufwärts addiert. D. g.

$$\sin 7^0 30' = 1{,}9153244 \cdot R^2, \quad \sin 22^0 30' = 5{,}6154469 \cdot R^2,$$
$$\sin 37^0 30' = 8{,}9328860 \cdot R^2, \quad \sin 52^0 30' = 11{,}6415637 \cdot R^2,$$
$$\sin 67^0 30' = 13{,}5568881 \cdot R^2, \quad \sin 82^0 30' = 14{,}5483330 \cdot R^2.$$

Jetzt folgt wieder mit Benützung der Prop. IV. durch einfache Addition:

$$\sin 15^0 = 14{,}5483330 \cdot R^3, \quad \sin 30^0 = 28{,}1052211 \cdot R^3,$$
$$\sin 45^0 = 39{,}7467848 \cdot R^3, \quad \sin 60^0 = 48{,}6796708 \cdot R^3,$$
$$\sin 75^0 = 54{,}2951177 \cdot R^3, \quad \sin 90^0 = 56{,}2104421 \cdot R^3 = R'^3$$

u. s. w. Durch diese dreimalige Addition hat man die Sinusse der Winkel, welche auf 7 Dezimalen angegeben waren, bereits auf zwei weitere Dezimalen genau gefunden, denn aus der letzten Zahlenreihe folgt z. B. $56{,}2104421 \cdot R^3 : 54{,}2951177 \cdot R^3 = 1000000000 : x$ und hieraus $x = \sin 75^0 = 0{,}9659258257$, während man auf anderem Wege für diesen Sinus 0,965925826.3 findet. Zwei weitere Additionen würden das Resultat auf 10 Dezimalen genau liefern, u. s. w. Die Anzahl der richtigen Stellen ergibt sich aus der Anzahl der Stellen, welche in $2 \sin 30^0$ mit dem Wert von 90^0 übereinstimmen. Um diese Methode praktisch zu verwenden rät Snellius, die Sinustafel zuerst direkt auf vier Stellen zu berechnen, worauf man sie dann durch zweimalige Addition auf 6 und durch viermalige auf 10 Stellen erweitern kann. Legt man sich eine Tabelle nach Art der Differenzentafeln an, so läfst sich die Rechnung sehr rasch ausführen.

Aufser diesen beiden so fruchtbar verwerteten Formeln gibt Snellius noch folgende zwei an, die zur Berechnung der Tangenten und Sekanten durch blofse Addition der Sinusse dienen:

(Prop. VII. p. 58) $\operatorname{tg}\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = 1 + 2\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + \cdots + 2\sin n\alpha$

für $(n+1)\alpha = 90^0$, und

(Prop. VIII. p. 59) $\sec\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{3\alpha}{2} + \cdots + \sin\frac{(2n-1)\alpha}{2}\right)$

für $n\alpha = 90^0$. Alle diese Formeln werden für spezielle Werte von n geometrisch abgeleitet, dann aber allgemein ausgesprochen.

Aus seiner Dreieckslehre entnehmen wir Folgendes. Der Beweis für den Sinussatz der ebenen Trigonometrie stimmt mit jenem überein, den wir schon bei Vieta fanden[1]) (Seite 177), ebenso spricht er den Cosinussatz genau in der von uns bei diesem Geometer zuerst gefundenen Form aus, bemerkt aber noch die Gleichung $2bc : [a^2 - (b-c)^2] = 1 : \text{sinvers}\, A$; ferner gibt er (Seite 76) einen präzisen Wortlaut für die bereits von Rhaeticus gefundene Formel zur Berechnung eines Winkels aus drei Seiten, der unserer Schreibweise $[s(s-a)] : [(s-b)(s-c)] = 1 : \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}$, wo $s = \frac{a+b+c}{2}$ ist, genau entspricht, stellt die Formel $\sin A = \frac{2\Delta}{bc}$ (für Δ = Dreiecksinhalt) auf (Seite 90) und teilt endlich noch ein Verfahren mit, um einen spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks ohne Trigonometrie aus den Katheten desselben angenähert zu finden, d. h. also eine Methode, die die trigonometrischen Tafeln entbehrlich macht. Es beruht diese Methode, auf welche er bei seiner Kreismessung geführt wurde und sie daher schon in seinem Cyclometricus eingehend besprochen hat[2]), auf jener Gleichung $x = \frac{3\sin x}{2 + \cos x}$, der wir schon bei Cusanus begegneten. Wohl ist es möglich, dafs Snellius bei seiner grofsen Litteraturkenntnis, die er namentlich in seiner Einleitung zum „Eratosthenes Batavus" zeigt, des Cusaner's Kreismessung kannte, doch scheint er uns mehr durch die von Philipp von Lansberg verwendete Methode (Seite 175) zu seiner Gleichung geleitet worden zu sein, da ihre Entstehung mit jener viel Ähnlichkeit bietet. Die Verwendung, die er von ihr macht, ist übrigens eine doppelte; einmal die schon erwähnte, wodurch eine Trigonometrie ohne Tafeln geschaffen wird, — und dieser Gedanke gehört ihm ganz allein an — und dann umgekehrt zur Berechnung der Zahl π. Die Ableitung dieser Gleichung, die mit jener des Nicolaus von Cusa nichts gemein hat, ist folgende. Der Durchmesser BS eines Kreises (Fig. 54) mit dem Mittelpunkt A wird über S um $SR = AS = r$ verlängert und von A eine beliebige Sekante gezogen, welche die Tangente des Punktes B in X und den

---

1) Wir bemerken dies hier, weil van Geer a. a. O. der Ansicht zu sein scheint, derselbe sei zuerst von Snellius gegeben worden. — 2) Daselbst Propositio XXXVIII. p. 76—86.

Kreis in C schneidet. Fällt man von C die Senkrechte CO auf den Durchmesser, so ergibt sich die Proportion $RO:CO=BR:BX$, und hieraus $BX=\frac{CO\cdot BR}{RO}=\frac{r\sin x\cdot 3r}{2r+r\cos x}=r\cdot\frac{3\sin x}{2+\cos x}$. Snellius gibt nun an, dafs arc. $BC>XB$ ist, und da der Unterschied beider, wenigstens für kleine Winkel, sehr gering ist, so kann man arc. $BC=BX=r\cdot x$ setzen und hat dann die verlangte Gleichung. Den Beweis für die Richtigkeit der obigen Ungleichung hat Snellius geometrisch zu führen gesucht, jedoch ist derselbe nicht einwandsfrei, worauf schon Kaestner aufmerksam machte[1]). Erst Huygens ist es bei seiner Kreismessung gelungen[2]), einen exakten Nachweis für sie zu liefern[3]).

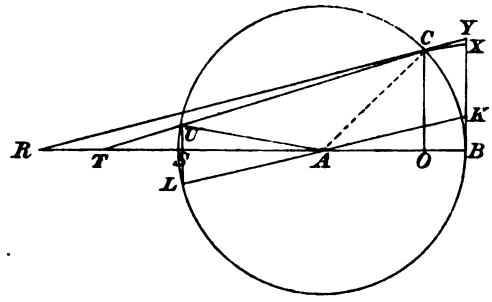


Fig. 54.

Zum ersterwähnten Gebrauche hat Snellius in seiner Trigonometrie (p. 84—85) eine Arcus-Tafel berechnet, durch welche man den sich aus der Gleichung mittelst der bekannten Katheten $\sin x$ und $\cos x$ im Längenmafs ergebenden Bogen x direkt ins Gradmafs umsetzen kann; dieselbe läuft für den Radius 10^8 sowohl von Grad zu Grad, als auch von Minute zu Minute.

Um zu sehen, wie Snellius die fragliche Formel zur Berechnung von π benützte, haben wir nur den aus der Gleichung im Längenmafs sich ergebenden Winkel x ins Bogenmafs umzusetzen und erhalten $\frac{\pi x^0}{180^0}=\frac{3\sin x^0}{2+\cos x^0}$ und hieraus $\pi=\frac{180^0}{x^0}\cdot\frac{3\sin x^0}{2+\cos x^0}$. Legt man einen kleinen Winkel zugrunde, so liefert die Formel eine sehr gute Annäherung; so ergibt sich z. B., wenn $2CO$ die Seite des 96-Ecks ist, für $x^0=\frac{180^0}{96}=1^0\,52'\,30''$, also $\pi=96\cdot\frac{3\sin 1^0 52' 30''}{2+\cos 1^0 52' 30''}=3{,}1415926272$, also auf 7 Dezimalen genau, während die Methode des Archimedes für das 96-Eck π nur auf 2 Dezimalen liefert.

Übrigens hat Snellius noch eine zweite Gleichung zur Berechnung von π entwickelt[4]), die bisher nicht beachtet wurde, indem er

1) Geometrische Abhandlungen I. Sammlung. Göttingen 1790. 157 ff. — 2) De circuli magnitudine inventa 1654. 30—31. — 3) Man findet leicht die Richtigkeit der Gleichung, wenn man in sie die beiden ersten Glieder der Potenzreihen für $\sin x$ und $\cos x$ einführt, also nur bis zum dritten Grade geht. — 4) Cyclometricus. Prop. XXIX. p. 43 ff.

eine obere Grenze für den Bogen BC angab. Die durch sie erreichte Annäherung ist jedoch weniger genau. Indem er nämlich (Fig. 54) durch Punkt C eine Linie CU zog, so dafs $UT = r = 1$ wurde, erhielt er als Schnittpunkt derselben auf BX den Punkt Y und behauptete, dafs $YB = \operatorname{tg}\frac{x}{3} + 2\sin\frac{x}{3} > \text{arc.}\, BC$ sei, so dafs die Ungleichung besteht

$$\frac{3\sin x}{2+\cos x} < x < \operatorname{tg}\frac{x}{3} + 2\sin\frac{x}{3}.$$

Diese neue Ungleichung wird erhalten, indem man $AK \parallel UY$ zieht und beachtet, dafs, da $UT = UA = 1$ ist, $\sphericalangle KAB = \sphericalangle UAS = \sphericalangle T = \frac{x}{3}$ sein mufs. Es folgt dann sofort, dafs $BY = BK + KY = \operatorname{tg}\frac{x}{3} + UL = \operatorname{tg}\frac{x}{3} + 2\sin\frac{x}{3}$ wird. Wie der erste, so ist auch der zweite Teil der Ungleichung richtig, aber von Snellius mangelhaft bewiesen. Um mit seiner Hilfe π zu bestimmen, wird wieder $\frac{\pi x^0}{180^0} = \operatorname{tg}\frac{x^0}{3} + 2\sin x^0$ gesetzt, und man erhält hieraus mit Benützung der Seite des 96-Ecks: $\frac{x}{3} = \frac{180^0}{96}$, $\pi = 3{,}1415928320$, ein Wert, der auf 6 Dezimalen genau ist[1]).

Es mufs noch bemerkt werden, dafs diese beiden Gleichungen sowenig, wie die seiner Zeit von Lansberg aufgestellte Formel, jemals als transscendente Gleichungen zur Bestimmung des Bogens x aufgefafst wurden. Einer solchen Forderung zu genügen, hätte auch die damaligen Kräfte völlig überstiegen, wie sich bei jener bekannten Gleichung zeigte, auf die Kepler 1609 bei Untersuchung der Gestalt der Marsbahn gestofsen war und die nachmals den Namen: „das Kepler'sche Problem" erhielt[2]).

An die theoretischen Ausführungen über die Berechnung ebener Dreiecke schliefsen sich in der Trigonometrie des Snellius die Lösungen geodätischer Probleme an, von denen wir, da wir ja die Anwendungen der Trigonometrie grundsätzlich von dem Plane unseres Werkes ausschliefsen, nur eines vorübergehend bemerken wollen, weil es bisher einer viel späteren Zeit zugeschrieben wurde. Es ist

---

1) Albert Girard hat diese beiden Formeln des Snellius in seiner oben besprochenen trigonometrischen Schrift angemerkt; später findet sich die erstere noch wiederholt in der Litteratur, so bei Ozanam: Nouvelle Trigonométrie 1699, und noch bei Dienger, Handbuch der Trigonometrie 1855. Vgl. auch Le Paige, Mathesis X. 1890. 34—36 und Brocard ebenda. IX. 161. — 2) Es ist dies die Gleichung $rx + e\sin x = \frac{m}{n} r\pi$, die Kepler in seiner Astronomia. Opera. Ed. Frisch III. 411 entwickelt.

dies das jetzt unter dem Namen „die Aufgabe von Hansen" bekannte Problem: die Distanz zweier Punkte C und D in der Ebene zu bestimmen, wenn eine feste Standlinie AB und die Gesichtswinkel gegeben sind, unter denen die Linien BD und AC einerseits und die Linien AD und BC andererseits von A und B aus erscheinen. Er führt diese Aufgabe für alle vier möglichen Lagen der Standlinie zu den beiden Punkten C und D in sehr eleganter Weise und zwar numerisch durch. Ein anderes Grundproblem der Geodäsie, das mit demselben Unrechte den Namen des französischen Mathematikers Pothenot[1]) erhielt, behandelte Snellius schon in seinem Eratosthenes Batavus (Lib. II. Cap. X. p. 199). Es ist dies bekanntlich die Aufgabe: „Aus den gegenseitigen Abständen dreier Punkte die Entfernung derselben von einem vierten zu bestimmen, wenn die Gesichtswinkel gemessen sind, unter denen die Entfernungen der ersten drei Örter von dem vierten aus erscheinen." Er löste sie, indem er die Radien der beiden Kreise bestimmte, auf denen der vierte Punkt liegen muſs.

Auch in der sphärischen Trigonometrie hat Snellius Bemerkenswertes geleistet. Vor allem findet sich bei ihm das eigentliche Supplementardreieck[2]) präzis definiert und verwendet, durch welches es ihm, wie er sagt, gelingt, die für seine Vorgänger noch notwendigen Betrachtungen über die gegenseitigen Gröſsenverhältnisse der Seiten und Winkel des gegebenen Dreiecks fallen zu lassen. Offenbar hat er Vieta's Figuren genauer als seine Vorläufer angesehen und daraus den Vorteil des Supplementardreiecks vor seinen Nebendreiecken erkannt[3]).

Daſs ihn überhaupt Vieta's Werke besonders beeinfluſsten, dafür spricht unter Anderem auch der Umstand, daſs er die Hauptformeln der Trigonometrie genau in der von jenem gegebenen und bisher wenig benützten Gestalt anführt. Bei dieser Gelegenheit gibt Snellius auch zum erstenmale einen Beweis[4]) für die Cotangentenformel Vieta's, und zwar geometrisch auf denselben Prinzipien, deren sich schon Rhaeticus bei seinen Beweisen bedient hatte.

Snellius war unzweifelhaft ein vorzüglicher Kenner der Trigono-

1) Dies wurde wohl zuerst von Kästner bemerkt. Geometrische Abhandlungen, erste Sammlung 1790. Göttingen. Einleitung. — Pothenot's Abhandlung erschien in den Mémoires de l'Académie royale X. 1730. 150—153, war aber schon 1692 vorgelegt worden. Über die weitere Geschichte dieses Problems siehe Kästner a. a. O. 409. — 2) Trigonometria lib. III. Prop. VIII, 120: „Si ex angulis datis tripleuri tamquam polis, maximi circuli describantur, comprehendent tripleurum, cujus latera et anguli, laterum et angulorum primo datorum residuis reciproce respondeant." — 3) A. a. O. 180 erwähnt er die Enallage πλευρογωνίκη Vieta's. — 4) A. a. O. lib. II. Prop. V. 201.

metrie und verstand sie bei seinen praktischen Arbeiten gewandt zu handhaben, jedoch kannte weder er, noch sein Zeitgenosse Girard die Logarithmen, was darin seinen Grund hat, dafs dieselben erst in dem Todesjahre des ersteren in den Niederlanden in weiteren Kreisen bekannt wurden. Übrigens schliefst mit Snellius und Girard noch keineswegs die ältere Periode der Trigonometrie in Holland ab, denn in demselben Jahre, in welchem des Snellius Trigonometrie erschienen war, 1627, gab Franz van Schooten, der Ältere „Tabulae sinuum, tangentium, secantium ad Radium 10000000 avec l'usage d'icelles en triangles plans" zu Amsterdam in 8° heraus, die noch 1683 zu Brüssel wieder aufgelegt wurden. 1632 erschien hiervon eine von Stampioen besorgte niederländische Ausgabe, in der die sich auf die ebene Trigonometrie erstreckende Einleitung des Originales noch um eine kurze sphärische Trigonometrie vermehrt war[1]). Auch wurde die Schrift ins Französische übersetzt und 1672 zu Rouen herausgegeben[2]). Die dem Original beigegebene Trigonometrie ist kurz und bündig und enthält alle Hauptsätze. Das Gleiche gilt von der sphärischen Trigonometrie Stampioen's, in welcher sich ähnlich wie bei Girard Versuche einer Formelschrift finden.

Franziscus van Schooten (1581—1646) lebte in Leiden, wurde nach Ludolph van Ceulen's Tode dessen Nachfolger und 1615 Professor an der Universität, ein Amt, das er bis zu seinem Tode bekleidete. Übrigens blieben ihm die trigonometrischen Logarithmen keineswegs fremd, denn in seinem Nachlasse fand sich neben einer „Doctrina Prosthaphaeretica" auch eine „Trigonometria Logarithmica", die aus dem Jahre 1632 stammt[3]). Nebenbei bemerkt hat sich auch sein Sohn gleichen Namens, der 1615—1660 lebte, 1646 der Nachfolger seines Vaters wurde und ihn an wissenschaftlicher Bedeutung übertraf, neben seinen Arbeiten über die analytische Geometrie Descartes', ähnlich wie Ludolph van Ceulen, mit Anwendungen der Trigonometrie auf theoretische Fragen beschäftigt[4]).

Ferner war in Amsterdam 1622 die „Astronomia Danica" Longomontan's erschienen, den wir schon früher als einen eifrigen Verteidiger der prosthaphäretischen Methode kennen lernten, und da sein Werk noch 1640 wieder aufgelegt wurde, scheint die ältere Methode damals noch immer Anhänger gefunden zu haben.

---

1) Kort By-voeghsel der Sphaerischer Triangulen door J. J. Stampioenium, Juniorem, Mathematicum. Tot Rotterdam 1632. 8°. — 2) Bierens de Haan Bouwstoffen voor de Geschidenis der Wis- en Natuurkundige Wetenschappen in de Nederlanden. XIII. Verslagen en Mededeelingen der k. Akademie van Wetenschappen. XII B. 37 und 53—54. — 3) Bierens de Haan a. a. O. 45. — 4) Exercitationes mathematicae 1657.

Ebenso wenig, wie diese Männer, schlofs sich Adrianus Metius in seinem späteren Alter der neuen Richtung an, denn weder seine 1626 erschienenen „Arithmeticae libri duo et geometriae libri sex" Lugd. Bat. in 4°, welche eine kurze ebene Trigonometrie mit einem Kanon der Sinusse von 10′ zu 10′ enthalten, noch sein schon früher erwähntes „Primum mobile" von 1631 zeigen irgend eine Spur von Logarithmen. Das Gleiche gilt von einer Schrift des Brüsseler Jesuiten Jacques-Honoré Durand (1598—1644), der einen Lehrstuhl der Mathematik in Grasse in der Provence inne hatte. Diese führt den Titel[1]): „Euclidis six primi elementorum geometricorum libri etc." 1636 in 12° und enthält eine kurze Trigonometrie, die aus Clavius' Werken geschöpft ist und eine Tafel der Sinus, Tangenten und Sekanten für den Radius 10^5 aufweist. Überhaupt folgten die Mitglieder des Jesuitenordens, von denen damals viele Lehrstühle der Mathematik und Astronomie inne hatten, lange Zeit der von ihrem Altmeister Clavius vorgezeichneten Richtung und kümmerten sich weniger um die neue Methode. So übergeht sie auch Johann Ciermans[2]) († 1648), Professor der Mathematik zu Löwen und Antwerpen, der in seinen „Disciplinae mathematicae" von 1640 auch die Trigonometrie berührt. In einem ähnlichen aber weit umfassenderen Werke, dem „Canon mathematicus sive absoluta mathematicarum disciplinarum Encyclopaedia" Herbipoli 1661 in 4° gibt der Jesuit Caspar Schott lib. IV und V noch eine elementare Trigonometrie, die keinerlei Fortschritt zeigt und sich nur einer daselbst mitgeteilten Tafel für Sinus, Tangens und Secans bedient. Derselbe kennt zwar die logarithmische Trigonometrie, mufs aber „wegen Platzmangels" von ihrer Mitteilung abstehen und verschiebt ihre Besprechung auf eine andere Gelegenheit. In der That erschien auch 1674 eine neue Ausgabe seines Werkes, in welcher die Logarithmen und ihre Anwendungen enthalten sind. Er gibt dort Tafeln der Sinusse, Tangenten und Sekanten und ihrer Logarithmen auf 10 Dezimalen.

Ferner ist noch zu nennen der als Astronom wohlbekannte Jesuit Christoph Grimberger (1580—1636), welcher ein Schüler des Clavius war und zuerst in Österreich, dann in Rom lebte und lehrte. Er gab 1630 ein viel gebrauchtes Lehrbuch der Trigonometrie[3]) heraus, das sich ebenfalls nur der älteren Methode bediente.

---

1) Quetelet, Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques chez les Belges 202. — 2) Vgl über ihn Cantor II. 657. — 3) Elementa trigonometrica, id est sinus, tangentes, secantes in partibus Sinus totius 100000 in 8°. Backer, Bibliothèque des écrivains de la Compagnie de Jesus, zitiert eine Ausgabe der Schrift von 1619.

Die in demselben enthaltenen Tafeln der Funktionen sind übrigens mit besonderer Sorgfalt berechnet, indem z. B. zur Bestimmung der Sekanten auf 5 Dezimalen die Sinusse auf 10 Dezimalen zugrunde gelegt werden. Die Zahl π wird in dieser Schrift auf 38 Dezimalen richtig angegeben.

Eine andere Schrift, welche die Logarithmen ignoriert, ist die 1640 in Ingolstadt erschienene „Arithmetica vulgaris et Trigonometria rectilinearum prout universae geometriae practica" von dem polnischen Mathematiker Tonski, der die Tafeln des Regiomontan und Clavius verbesserte und auf den Radius 10^6 erweiterte. Eine zweite Schrift, welche 1645 erschien, ist eine verbesserte Auflage der ersten und enthält zu der ebenen Trigonometrie auch noch die sphärische.

Es kann nicht unsere Aufgabe sein, alle die verschiedenen Schriften und Lehrbücher aufzuzählen, welche in jener Zeit erschienen, wir wollten nur in den angeführten Beispielen darthun, wie noch bis über die Mitte des 17. Jahrhunderts hinaus, trotz der weiten Verbreitung der Logarithmen, von vielen Seiten mit grofser Zähigkeit an der alten Methode, die sich direkt der trigonometrischen Linien bediente, festgehalten wurde.

Namen- und Sachregister.

A.

Abbasiden 43, 44, 59, 76.
'Abd-Almelik 76.
'Abd-Arrahmân 76.
'Abdel-Aziz 76.
Abendweite 25.
Abraham bar Chijja 89, 93, 97.
Abraham ben Daûd 94.
Abraham ibn Esra 89, 93, 94.
Abû Dschafar-Al-Chazîm 67.
Abû Ḥasan 46.
Abû'l Dschûd 72.
Abû'l Fazl Ennirizî 67.
Abû'l Feda 11, 49, 65, 84.
Abû'l Ḥaṣan Ali von Marokko 49, 83, 84, 85.
Abû'l Wafâ 17, 54—65, 68, 71, 75, 79, 81—84, 102, 105, 121, 184, 188, 209, 225.
Abû Naṣr 58, 59, 60, 71.
Abû Schudschâ 'Bujeh 59.
Açindihind, siehe Sindhind.
Additionsformel 20, 37, 56, 105, 164, 165, 214.
Adscripta = Tangente 184.
Ägypter 1, 3, 4, 6, 7, 11, 80.
Ähnlichkeit 4, 6, 52, 64, 66, 86, 217.
Äquator 12, 13, 38, 39, 41, 190, 191.
Äquinoctialpunkt 80.
Äquinoctialschatten 38, 39.
Äquinoctien 12, 38.
Agrimensoren 30.
Ahmes 1.
Al-'Aziz 62.
Albategnius, siehe Al-Battâni.
Al-Battâni 47—54, 57, 79, 83, 85, 91, 93, 100, 102, 129—131.
Albert von Sachsen 109.
Al Bîrûnî, Abû Reihan 44, 45, 60, 61, 71, 72, 83.
Albrecht, Herzog von Preuſsen 148.
Al-Chodschendî 58—60.
Al-Chwarizmî, Abû Dscha'far Mohammed ben Mûsa 44, 48, 49, 54, 83, 84, 94.
Alcuin 88.
Alexander der Groſse 31.
Alexander Severus 86.
Al-Farabi 46.
Al-Fazârî, Mohammed ben Ibrahîm 44, 48.
Al-Fergâni 48, 83, 92, 119, 130.
Alfons X von Castilien 51, 78, 85, 95, 99, 100.
Alfonsinische Tafeln 99, 100, 154.
Algebra 32, 54, 64, 96, 156, 183, 205, 238.
Algebraische Methoden 164, 224.
Algorithmus 73.
Al-Haitam 64.
Al-Ḥakam II 76, 77.
Al-Ḥakîm 62, 64.
Alhazen, siehe Al-Ḥaitam.
Al-Ḥokamâ 44.
Al-Ḥosaîn ben Mohammed ben Ḥamid 44.
Almagest 6, 10, 14—16, 18, 19, 22, 24—28, 40, 42, 46, 51, 53—55, 57—60, 67, 90, 92, 96, 100, 102, 109, 111, 119, 157.
Al-Mamûn 43, 44, 48.
Al-Manṣûr, Abbaside 43, 44.
Al-Manṣûr, Omajade 77.
Al-Muntahin 78.
Al-Zarkâli 45, 73, 76—80, 82, 83, 91, 92, 99, 101, 102, 116, 121, 137, 207, 208.
Amirucius, Georgios 92, 134.
Ammonius 29.
Amsinus = Tangente 161.
Analemma 11—13, 32, 41, 54, 75, 85, 101, 129, 143, 190, 197, 220, 235.
Anaximander 6, 7, 14.
Anderson, Alexander 163, 165, 167.
Anomalie 26.
Anthonisz, Adriaen 175.
Antiphon 172.
Antonius, Triumvir 29.
antyâ = Tagmass 40.
Apepa oder Apophis 1.
Apian, Peter 81, 137—139, 150, 155.
Apian, Philipp 137.
Apollonius 11.
Apotome 172.
Araber 5, 12, 14, 16—18, 21, 28, 41—52, 54, 55, 58, 61, 66, 68, 71, 73—75, 80, 81, 83—85, 87—89, 92, 94, 95, 97—99, 102, 119, 122, 127, 129, 130,

136, 161, 170, 171, 183, 190, 200, 207, 222.
Aratus 10.
Archimedes 19, 64, 87, 94, 172—175, 194, 210, 243.
Arcufication 111, 113.
Arcus-Tafel 107, 243.
Arcuscotangenten-Tafel 84.
Arcussinus-Tafel 84, 107.
Arcustangenten-Tafel 117.
ardhâ-djyâ 33.
Argument 49, 56.
Aristarch von Samos 7—9, 21.
Aristoteles 5.
Arithmetik 32, 87, 93, 94, 96, 145, 165, 175, 194, 205, 228, 248.
Arithmetisches Mittel 57.
Armillarsphären 99.
Arneth 33.
Artistenfacultät 87, 110.
Âryabhaṭa 33, 34, 94, 110.
Âryabhaṭyam 33—36.
Arzachel, siehe Al-Zarkâli.
Aschbach 77.
Astrolabium 61, 78—80, 85, 88, 90, 91, 95, 99, 108, 117, 144, 189, 190, 196.
Astrologie 3, 18, 31, 44, 76, 95, 149, 153, 191.
Astronomie 3, 5—13, 26, 28—31, 44, 59—63, 65, 66, 71, 73, 75—78, 81, 83—88, 90, 91, 93, 94, 96, 103, 107, 108, 118, 120, 122, 124, 128, 130, 135, 137, 148—150, 153, 154, 156, 193, 195, 196, 198, 201, 203, 204, 223—226, 228, 244, 246, 247.
Astronomische Methoden 47.
Astronomische Tafeln 56, 62, 72, 94, 99, 103, 109, 191.
Aszensionaldifferenz 12, 38—40.
Atal-Eddîn Dschamschid 72.
Atelhart von Bath 48, 49, 94.
Attalus III 29.
Autolykus von Pitane 14.
Azimut 25, 53, 64, 85.

B.

Babylonier 6, 7, 34.
Backer 247.
baculus geometricus (astronomicus) = Jakobstab 103.
Baltzer, R. 146.
basis = Cosinus 146, 147, 158, 160, 217.
Bassantin, James 156.
Battaglini 143.
Beaugrand, Jean de 163.
Beda venerabilis 88.
Belisar 87.
Berger, H. 14, 26.
Bernardus 107.
Bernegger, Mathias 236.
Berti 142, 143.
Bessarion, Kardinal 119.
Bhâskara Âkârya 32, 33, 37.
Bianchini 115, 119—122, 124, 154.
Bianco, Andrăas 115.
Bierens de Haan 238, 246.
Biernatzki 5.
Biot, E. 4.
Biot, J. B. 31, 32.
Biridanus siehe Bredon.
Blebelius, Thomas 149.
Bleilot 116.
Boethius 87, 88, 92.
Boivinus 91.
Boll, Fr. 18.
Boncompagni, B. 42, 45, 87, 92, 93, 97, 150, 172.
Bouvelles, Charles 113, 173.
Bradwardinus, Thomas de 57, 109.
Brahmagupta 32, 45.
Brahmanen 42.
Brahmasphuta-siddhânta 32, 45, 46.
Bramer, Benjamin 209, 211, 240.
Braunmühl, A. v. 10, 197.
Bredon, Simon 109.
Breite, astronomische 40, 136, 143.
Breite, geographische 134, 135, 144.
Bressieu, Maurice 183—189, 191, 192, 216, 227.
Bretschneider 3, 6, 7.
Breusing 115.
Briggs, Henry 211.
Brocard 244.
Bryte, Walter 109.
Bürgi, Jobst 73, 167, 194, 196, 197, 199—202, 204—207, 209—211, 213, 222, 224.
Bujiden 59.
Burgess, E. 31, 32, 34, 35, 38, 40, 42, 51.
Byzantiner 86, 90.

C.

Caesar 29.
Camerarius, Joachim 149.
Campanus, Johannes 101, 109, 121.
Canones des Al Zarkâli 78, 92.
„ des Johann de Lineriis 107.
„ des Joseph ibn Wakkar 103.
„ des Maudith 108.
„ des Prosdocimo di Beldomandi 108.
Canones des Rhaeticus siehe Kanon.
Canon mathematicus des Johann Ciermans 247.
Canon mathematicus des Vieta 158—160, 162—164, 171, 173, 176—180, 183—186, 224.
Canon sinuum des Bürgi 205, 210, 211.
Canon triangulorum des A. Romanus 229.
Cantor, M. 1, 2, 4—6, 8, 9, 15, 18, 19, 22, 30, 31, 36—38, 42, 43, 46, 48, 52, 53, 55, 56, 59, 64, 66, 70, 72, 86—89, 92, 95, 96, 101, 107, 109—114, 118, 122, 123, 127, 132—134, 136, 143,

145, 154, 164, 165, 171—175, 185, 209, 212, 228, 239, 247.
câpa = Bogen 33.
cara = Aszensionaldifferenz 38.
Caratheodory, Alexander 47.
Carra de Vaux 55, 59.
Casiri 44, 48.
Cassiodorius, Magnus Aurelius 87.
Cataldi, Pietro Antonio 174, 210.
Cavalieri, Bonaventura 151, 177, 239.
Chaldäer 3, 11.
Chasles, Michael 17, 48, 49, 95, 127, 146.
Chinesen 3, 5.
Chioniades 90.
chorda 16, 26, 50, 78, 104, 106—110, 112, 115, 206.
chorda recta 108, 109.
chorda versa 50, 108.
Chordentafel 107, 109, 111.
Chorographie des Rhaeticus 144, 228
Christian II von Dänemark 193.
Christmann, Jakob 136, 137, 175, 202, 215, 221, 236.
Chronologie 60, 61, 174.
Chrysokokkes, Georgios 90.
Cicero 30.
Ciermans, Johann 247.
Clavius, Christoph 121, 173, 174, 189—192, 195—197, 228—230, 232, 247, 248.
Clemens IV, Papst 101.
Cofunktionen, siehe Komplementärfunktionen.
Colebrooke 32, 33, 37, 45.
Coligny 157.
Condé 157.
Commandinus, Friedrich 7, 8, 11—13, 95, 101, 190, 198.
Coppernicus, Nicolaus 139—146, 148, 149, 156, 182, 215, 219, 220.
cosa 206.
Cosecante 57, 115, 146, 147, 180, 192, 197, 214, 232, 233.
Cosinus 40, 53, 104, 108, 114, 115, 131, 139, 141, 144, 146, 147, 150, 151, 155, 164, 165, 167, 176, 180, 192, 211, 214, 219, 222, 232, 233.
Cosinussatz, ebener 27, 126, 177, 224, 242.
Cosinussatz, sphärischer 41, 53, 54, 71, 85, 130, 131, 135, 180—182, 189, 192, 198, 199, 201—203, 219, 225, 227, 229, 232, 235.
Coss 205.
Cotangente 52, 57, 68, 75, 80, 84, 88, 98, 115, 161, 180, 214, 232.
Cotangentenformel, sphärische (III. Hauptsatz) 181, 182, 229, 245.
Cotangententafel 51, 54, 62, 68, 100, 146, 147, 149, 151, 192.
cotidjyâ = Cosinus 40.
Cousin 62.
Crüger, Peter 177, 178, 236.
Cubus 206.
Curtius, Jacob 195.
Curtze, Max 2, 46, 57, 80, 87—89, 99, 102—108, 110, 111, 113, 117, 142, 143, 144, 146, 197, 212.
Cusanus, Nicolaus 111, 112, 113, 115, 242.

D.

David ibn Nahmias 100.
Davis 32, 35.
Deklination 12, 13, 24—26, 38—40, 42, 44, 52, 53, 64, 78, 136, 143.
Delambre 13, 17, 24—26, 28, 35, 51, 53, 58, 62—64, 79, 81, 85, 125, 126, 130, 132, 146, 180, 182, 204, 223.
Descartes 246.
Dezimalbrüche 74, 173, 210, 225.
Dezimalrechnung 210.
Dezimalsystem 111, 120.
Dezimalteilung 114.
Dichotomie 213.
Dienger 244.
Diogenes Laërtius 5, 6.
Diophant 164.
Diopter 98, 116.
Diopterlineal 80, 116.
Distanzmesser 117.
Distanzmessung 4, 6, 86, 98.
Divisionsverfahren zur Auflösung numerischer Gleichungen, siehe Näherungsmethode.
djyâ = Sehne 33, 49.
djyâ-ardhâ = Halbsehne 33.
Dominicus, Magister 96.
Dominicus Gondisalvi 92.
Dominicus Parisiensis oder de Clavasio 107, 110.
Doppeldeutige Dreiecksfälle 69, 125, 129, 218, 220.
Doppelmayr 122, 132, 133, 134.
Dorsum des Astrolabiums 80.
Dreieck, ebenes 15, 26, 27, 58, 66, 67, 82, 105, 125, 126, 129, 134, 160, 176, 177, 180, 187—189, 191, 196, 201, 202, 212, 215, 217, 244.
Dreieck, eingeschriebenes 173.
„ , gleichschenkliges 117, 125.
„ , rechtwinkliges 2, 4, 7, 17—20, 24—27, 41, 53, 58—60, 62, 66, 68—70, 72, 82, 84, 91, 105—107, 117, 122, 123, 125—129, 134, 141, 142, 146, 148, 151, 152, 159, 160, 164, 176, 178, 179, 180, 182, 184, 185, 187, 188, 196, 201, 212, 215—219, 225, 227, 229, 232, 234, 237, 242.
Dreieck, reguläres 19, 111, 112.
„ , schiefwinkliges 24, 26, 27, 53, 66—69, 82, 91, 105, 106, 125, 128, 177, 180, 183, 189, 197, 200, 202, 212, 218, 225, 229, 232, 234, 238.
Dreieck, sphärisches 7, 10, 12, 15, 18, 25, 26, 27, 38, 41, 42, 53, 54, 58, 60,

62, 67, 71, 72, 82, 84, 122, 123, 127, 128, 130, 132, 134, 137, 145, 151, 152, 156, 160, 179, 180, 184, 185, 189, 190, 191, 196, 198, 212, 215, 216, 218, 224, 225, 227, 228, 230, 232, 233, 237, 238, 246.
Dreieck, umgeschriebenes 173.
Dreieckslehre 142, 143, 180, 188, 215, 227, 236, 242.
Dreieckszahlen 166.
Dreikant 60, 68, 142, 148, 180.
Dreiteilung des Winkels 21, 28, 121, 167, 170, 171, 206, 207, 214.
Dreiteilungsgleichung 72, 73, 75, 170, 171, 207, 208, 214, 222.
Dschâbir ibn Aflah 50, 62, 76, 77, 81—84, 92, 96, 100, 105—107, 127, 128, 138, 139, 141, 142, 150, 152, 179.
dschaib 49, 50.
dschîba, dschîwa, siehe djyâ.
dschîb temâm 84.
dschîb fadhal 84.
Dschingiskhan 65.
Duchesne, Simon 173.
Dürer, Albrecht 189.
Dupuis 3.
Durand, Jacques-Honoré 247.

E.

Eisenlohr, A. 1, 2.
Ekliptikschiefe 24—26, 42, 136, 143.
elgeib 49.
Enallage πλευρογωνίκη 182, 193, 224, 227, 245.
Encyklopädie 96, 112, 247.
End, W. 210.
Ende 96.
Eneström, G. 89, 158.
Epizykelsystem 31.
Eratosthenes 14.
Erdsinus (kshitijyâ) 38, 39.
Ergänzungstheorem, siehe Ersatztheorem.
Ersatztheorem 59, 61, 67—69.
Eudemus 6.
Eudoxus 7, 10.
Euklides 3, 6, 14, 15, 17, 19, 46, 87, 105.
Euklidübersetzung von Campanus 101, 121.
εὐθεία (Sehne) 18, 21.
Exzentrizität 26.

F.

Fatimiden 62.
Favaro, A. 108, 187, 191, 201, 229, 234.
Feldmeſskunst 9, 30, 91, 93, 96, 114, 193, 204, 225, 226, 228, 244, 245.
Feldmessung 1, 80, 88, 93, 117.
Ferdinand, Kaiser 211.
Figar 44, 45.
figura katta 46, 47, 51, 66, 81, 96, 102.
figura sectoris, siehe figura katta.
Figurierte Zahlen 167.
Finaeus, Orontius 139, 154, 155, 173.
Finger (Längenmaſs) 38, 39, 51, 84, 100.
Fink, Thomas 151, 178, 186—189, 191—193.
Flächenformel des sphärischen Dreiecks 238.
foecundus = Tangente 161.
foecundus residuae = Cotangente 161.
Fo-kuu 4.
Forcatel 157.
Formaleoni, Vincenzo 115.
Formelsprache 63, 71, 229, 238, 246.
Fra Luca di Borgo Sancti Sepulchri, siehe Luca.
Franz I. 183.
Friedrich I., Barbarossa 92.
Friedrich II., von Hohenstaufen 95, 96, 99.
Friedrich IV., Kurfürst 213, 221.
Friis 194.
Frisch 196, 210, 211, 244.
Frobenius 203.
Fünfeck 19, 189, 209.
Fünfeckseite 121.
Fünfteilung 167, 168, 170, 207.
Fünfteilungsgleichung 171, 207, 222.
Fünfundvierzigteilung 174.
Fünfzehneck 174.
Fundamentalformeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck 16, 25, 58, 67, 68, 82, 84, 122, 123, 128, 142, 148, 179, 184, 185, 188, 217, 227, 231—233.
Funktionentabelle 114, 147, 248.

G.

Gassendi 141.
Geber, siehe Dschâbir.
Gellibrand 177.
Gemma Frisius, Rainer 79, 117, 228.
Geodäsie, siehe Feldmeſskunst.
Geographie 11, 26, 65, 84, 93, 115, 133—135, 148, 203, 225.
Geometrie 3, 8, 9, 16, 17, 30, 70, 87, 88, 93, 103, 112, 145, 150, 164, 175, 186—189, 205, 228.
Geometrie, praktische 9, 87, 88, 93, 95, 96, 98, 107, 108, 110, 113, 114, 127, 189.
Geometrie, zeichnende 7.
Geometrisches Mittel 152.
Gerbert (Sylvester II.) 88.
Gerhard von Cremona 45, 46, 50, 79, 81, 92, 150.
Gerhardt, C. J. 224.
Gernerth, A. 221—223.
Giese, Tidemann 140.
Girard, Albert 228, 237—239, 244, 246.
Gleichung dritten Grades 21.
Gnomon 4, 6, 7, 26, 38, 39, 51, 52, 84, 100, 101, 151, 153.
Gnomonik 33, 41, 52, 75, 80, 85, 148, 151, 225.

Goldberg, Berl 103.
Goldener Schnitt 170.
Goniometrie 151, 156, 157, 160, 163, 171.
Goniometrische Formeln 151, 161—163, 187, 224.
Goten 87.
Graesse 146, 223.
Graphische Auflösung sphärischer Dreiecke 7, 38, 190, 191.
Graphische Methode 3, 10, 11, 13, 14, 32, 83—85, 228.
Gregoras Nikephorus 91.
Griechen 1, 5—11, 13—16, 18, 19, 22—34, 36, 38, 42, 44, 47, 48, 51, 55, 56, 65, 67, 71, 85, 86, 89, 90, 102, 105, 125, 129, 130, 141, 142, 150.
Grimberger, Christoph 247.
Grundfunktionen 146.
Günther, S. 14, 26, 71, 103, 106, 107, 114, 115, 127, 132—134, 137, 189, 193.
Gullielmus Anglicus 99.
Gunter, Wolfgang 145.

H.

Hagaecius 194.
Hakimitische Tafeln 61, 62, 64, 65, 72, 100.
Halbsehne 33, 38, 50, 141.
Haller, Stanislaus 190.
Halley 14.
Halma 10, 16—28, 40, 51.
Handtafeln, chronologische 27.
Hankel 52, 53, 59, 62, 72, 74, 82.
Hansen 245.
Hartmann, Georg 133.
Hârûn Arraschîd 43, 46.
Heiberg 11, 14, 16, 18, 19, 21—27, 51, 101.
Heinrich III. 157.
Heinrich von Hessen 109.
Heinrich IV. von Navarra 157.
Hektemoron 12.
Henry 42.
Hermann der Lahme 95, 99.
Herodot 6.
Heron von Alexandrien 8, 9, 30, 89, 98.
Heron von Byzanz 89.
Hettner, A. 103.
Hicksoskönige 1.
Hieronymus 5.
Hindu 31.
Hipler 144, 228.
Hipparch 9—12, 14, 17, 20, 79, 190.
Höhe, astronomische 40.
Höhenmessung 4, 14, 86, 88, 98, 225.
Höhenwinkel 6, 98.
Horizont 11—13, 38, 39, 80.
Hortensius, Martin 239.
Hugenottenpartei 157.
Hûlâgû 65.
Hultsch 8, 9.
Hunain ibn Ishâk 46.
Hundson, Ralph 223.
Hussam Uddîn 66.
Hutton 159.
Huygens, Christian 243.
hypotenusa = Sekante 144, 146, 147, 158, 160, 161, 184, 237.
Hypatia 28, 29.
Hypsikles 15.

I.

Jahjâ ibn Châlid 46.
Jakob Anatoli 96.
Jakob ben Machir Prophiat (Prophatius) 101.
Jakobstab 104, 117, 133, 149.
Ibn Al-Adamî 44.
Ibn Al-Kiftî 44.
Ibn Esra, siehe Abraham.
Ibn Jûnos 61—65, 68, 72, 85, 136, 180.
Ibn Maṭar 46.
Ibn Sinnâ 83.
Ideler 14, 19, 22.
Iean de Tournes 156.
Jean Errard de Barleduc 174.
Jehuda ben Mose Cohen 99.
Jehuda ben Salomo Cohen 96.
Ilkhanische Tafeln 65, 100.
Immanuel ben Jakob 103.
Inder 14, 30—38, 40—42, 44, 48, 49, 51—53, 59, 62, 75, 78, 79, 130.
Inklination der Magnetnadel 133.
Instrument zur Dreiecksauflösung 228.
Instrumente, astronomische 79, 80, 83, 85, 99, 103, 104, 116—118, 138, 139.
Instrumentum primi mobilis 81, 138, 139.
Interpolation 121, 123, 159, 233.
Interpolationsformel 35.
Interpolationsverfahren 21, 56, 75, 97, 114, 117, 121, 211.
Inversio κατ' ἀναπλήρωσιν 182.
Jöstel, Melchior 197, 199, 202, 203, 226, 230.
Johanna d'Albert 157.
Johann de Lineriis 107, 111.
Johann de Muris 107.
Johann de Saxonia 107.
Johann von Brixen 101.
Johann von Gemunden, siehe Schindel.
Johannes Chryppfs, siehe Cusanus.
Johannes Hispalensis, siehe Johannes von Luna.
Johannes von Gran 116.
Johannes von Luna 92.
Johannes von Palermo 96.
Johannes von Sevilla, siehe Johannes von Luna.
Joseph ibn Wakkar 103.
Jourdain 65.
Irreduzibler Fall der kubischen Gleichung 171.
Isak Argyros 90.

Isak ben Joseph Israeli 103.
Isak ibn Sid = Rabbi Isak 99.
Juden 46, 89, 92—94, 100, 101, 103.
Jussuf, Emir 76.
Justinian 29.

K.

Kabasilas, Nikolaus 91.
Kästner, A. G. 22, 50, 141, 174, 185, 186, 208, 212, 243, 245.
Kalenderrechnung 86.
Kanon, astronomischer 28, 155.
Kanon der Sinusse etc. 145, 148, 152, 156, 158—160, 163, 164, 178, 184, 187, 191, 200, 205, 221, 222, 224—226, 228, 230, 234, 237, 247.
Kanon der Tangenten und Sekanten 187, 221, 224, 230, 234.
Kanon des Rhaeticus 140, 145—148, 151, 152, 156, 158, 160, 178, 184, 200, 212—215, 217, 219, 221—223, 237.
Kardadja 44, 45, 78, 102, 110, 120.
Kardaga = Gardaga, siehe Kardadja.
Karl der Grofse 88.
Karl V., Kaiser 137, 188.
Katharina von Parthenay 157.
Καθετος = Tangente 144.
Kepler, Johann 138, 196, 205, 209—211, 235, 239, 244.
Kesten (κέστα) 86.
Khalifen 42—44, 59, 76.
Killingworth, Johann 109.
Kissling 3.
Kolur der Solstitien 80.
Komplementärfunktionen 145, 147, 151, 159, 161, 179, 187, 189, 221, 224, 225, 229, 232—234.
Kongruenzsätze 15.
Konvergenz 173.
Koppe 18.
Ko-Schau-king 5.
Kosmographie 137, 139, 155, 193.
kramadjyâ 34, 45.
Kreisfläche 2, 172.
Kreiskonchoide 121.
Kreismessung 66, 173—176, 228, 242, 243.
Kreispolygone, siehe Vielecke.
Kreisumfang 2, 4, 19, 37, 54, 97, 112, 174.
Kreisviereck 19, 20, 167.
Kremer, A. v. 43.
Krumbacher, K. 29, 90, 91.
kshitijyâ (Erdsinus) 38.
Kugeldreiecke, siehe sphärische Dreiecke.
Kugelgeometrie 70.
Kugellehre, siehe Sphärik.
Kurs der Schiffe 114.
Kutta, M. 93.
kuu 4.

L.

Ladislaus, König von Ungarn 115.
Länge, astronomische 24, 26, 42, 136, 143, 195.
Länge, geographische 134.
Längendifferenz zweier Orte 135.
Längenmessung 98.
Lagrange 21.
Lansberg, Philipp von 175, 176, 181, 189, 192, 242, 244.
Lateiner 86, 90, 92.
latus rectum 116.
latus versum 116.
Lefèvre, Jacques 154.
Lemma in 18 modis 46.
Lenormant 11.
Leon der Mathematiker 29.
Leonardo Pisano, Fibonacci 73, 96—98, 114.
Leonelli, Giuseppe Zacchini 172.
Le Paige 244.
Levi ben Gerson 82, 103—107, 125, 126
Liber Abaci des Leonardo 96.
Libri 89, 93, 107, 114, 235.
Lîlavâtî 33, 37.
Liouville 21, 56.
Liu-hwuy 5.
Logarithmen 18, 63, 136, 137, 144, 156, 197, 202, 203, 212, 235—237, 239, 246—248.
Logarithmentafel 124, 147, 158, 223.
Logarithmische Trigonometrie 236, 246, 247.
Longomontanus, Chr. S. 136, 195, 197, 202, 203, 246.
Luca Paciuolo 113, 114.
Lucas Gauricus 101, 153.
Ludolphische Zahl, siehe π.
Ludolph van Ceulen 173—175, 226, 246.

M.

Magini, Joh. A. 151, 187, 189, 191, 192, 202, 229, 231—235.
Magnus canon trigonometricus des Magini 234.
Mahmûd, Sultan 61.
Manitius, K. 10, 15.
Marre, A. 36, 54, 84.
Marteloio oder Martologio 114.
Martin, Ph. H. 8.
Maseres 159.
Mathäus von Gurk 130, 134, 135.
Mathematik 1, 3, 5, 7, 22, 28, 29, 42, 44, 45, 46, 48, 50, 59, 61, 75—77, 87—89, 92—94, 96, 101, 103, 107, 108, 110, 111, 114, 133, 137, 139—141, 145, 146, 148, 150, 153, 154, 156, 173, 174, 187, 196, 197, 202, 203, 212, 224, 237, 239, 247.
Mathias Corvinus 119, 122.

Maudith, Johannes 108.
Maurolycus von Messina 14, 16, 47, 132, 146, 150—153, 160, 187, 192.
Mechanik 87, 148, 195, 226.
Melanchthon, Ph. 148, 149.
Meliteniota, Theodoros 91.
Menelaus von Alexandrien 14—17, 20, 31, 40, 46, 47, 58—60, 66, 67, 75, 81, 92, 101, 102, 127, 128, 130, 132, 142, 150, 151, 184, 186, 188.
Menzzer 140.
Meridian 11—13, 38, 39, 41, 63, 80, 134, 230.
Meridionaldistanz 40.
Mêriem-al-Tchêlêbî 56, 72.
Meſsinstrumente 80, 88, 98, 104, 117.
Methode der Monddistanzen 7.
Metius, Adriaen 175, 228, 247.
Metochites, Theodoros 91.
Mettayer, Johann 183.
Michael Palaeologus 90.
Michael Scotus 95.
Mittagshöhe 53.
Mittagslinie 38.
Moerbecke, Wilhelm von 11, 101.
Mohammed der Prophet 42, 43.
Moivre, Abraham 165.
Mollerus 186, 187, 189.
Mongolen 65.
Montucla 48, 90, 91, 164, 166, 171.
De Morgan 186.
Morgenweite 25.
Moritz, Prinz von Nassau 227.
Moses ibn Tibbon 100.
Müller, Johannes, siehe Regiomontanus.
Mui'zz Eddaula 59.
Munk 49.
Murr, Chr. Th. 121.
Mûsâ 76.

N.

nâdî (Zeitmaſs) 38.
Nadir 38.
Näherungskonstruktion 189.
Näherungsmethoden zur Gleichungsauflösung 72, 73, 75, 171, 207.
Napoli 150.
Naṣir Eddîn Tûsi 17, 47, 58—61, 65—68, 70—72, 75, 82, 85, 86, 91, 119, 125—129, 178, 184, 185, 218.
nata (Stundenwinkel) 40.
Nautik, siehe Schiffahrtskunde.
Neper 178, 186, 235.
Neper'sche Regel 178, 186.
Nesselmann 22.
Neuneck 209.
Neunteilung 209.
Neuplatoniker 28, 29.
Neuplatonismus 29.
Neupythagoräer 29.
Newton, J. 32, 211.
Nichtkongruenz 15.
Niederländer 175.
Nikephorus, Gregoras 91.
Nikomachus 87.
Nizze 7, 15.
Nngo-kuu 4.
Nokk 14.
Nonius (Pedro Nuñez) 118, 154, 173.
n-Teilung der trigonometrischen Funktionen 160.
Null, griechische 22.

O.

Olleris 88.
Oloug Beg, siehe Ulûg Beg.
Omajaden 43, 76, 77.
Omar Al-Chaiyami 64, 72.
Omnisanctus 111.
Optik 65, 148.
Opus Palatinum 84, 145—148, 159, 205, 212—215, 220—223, 229.
Orthogonalprojektion 11, 32, 63, 64, 75, 129, 190, 230.
Ortsbestimmung, Methode der 11.
Osiander 140.
Ostaraber 42, 81, 83, 118, 132.
Ostpunkt 12, 80.
Oströmisches Reich 29.
Ost-West-Linie 38.
Otho, Valentin 136, 145, 205, 212—214, 218—221.
Ozanam 244.

P.

Paläologen 29, 90.
Pañchasiddhânticâ 32, 35, 36, 38, 40.
Pappus 27, 29.
Papyrus 1, 2.
Peckham, Johann 108.
pei (Gnomon) 4.
perpendiculum = sinus 146, 147, 158 160, 217, 226.
Perser 5, 42, 44, 61, 71, 72, 78, 91, 183, 200.
pertica (Meſsrute) 97.
Petavius 10.
Petz 106.
Peucer, Caspar 149.
Peurbach, Georg 45, 78, 79, 88, 110, 115—120, 122, 137, 208.
Pfeil (saḥem) = sinus versus 84, 94, 97, 100.
Pfleiderer 115, 118, 144, 145, 188.
Phaenomena des Euklid 14.
Philosophie 18.
π. 2, 5, 36, 54, 93, 94, 97, 109, 110, 112, 113, 116, 173—176, 242—244, 248.
Physik 239.
piremus 1, 2.
Pirkheimer, Willibald 132, 133, 135.
Pitiscus, Bartholomäus 73, 158, 177,

189, 196, 199, 202, 203, 207, 220—228, 232, 239.
Planetenbewegung 44.
Planetensystem 31.
Planetentheorie 92, 118, 119, 155.
Planisphaerium 11, 79, 85, 95, 119.
Plato 7.
Plato von Tivoli 48, 50, 93, 130.
Playfour 36.
Plotinus 30.
podismus umbrae 102.
Pol 11, 12, 17, 24, 80, 128, 185, 190.
Polarprojektion, siehe stereographische Projektion.
Poldistanz 190.
Polhöhe 12, 13, 25, 38, 40, 52, 53, 64.
Polybius 14.
Polygon, siehe Vieleck.
Polygonometrie 114, 228.
Porismen des Euklid 17.
Porphyrius 3.
Porro, Emanuel 203.
postica astrolabii, siehe dorsum.
Potenzreihen 243.
Pothenot 245.
Praetorius, Johannes 136, 212, 230, 236, 237.
prâna (Athemzug) 38.
Pratihâgajyakâ 35, 37.
Primlinie 112, 113.
Primzahlen 167.
Pringsheim, A. 112.
Projektionsmethode 13, 31, 33, 38, 41, 42, 52—54, 63, 72, 84, 85, 130, 143, 220, 235.
Proklus 6.
Prony 222.
Prophatius, siehe Jakob ben Machir.
Proportionaltafel 233.
Proportionalteile 110, 121, 141.
Proportionslehre 6, 33, 125.
Prosdocimo di Beldomandi 108, 111.
Prosinus = Tangente 161, 229, 230.
Prosthaphäresis 135—137, 143, 190, 193—198, 201—204, 209, 225, 232, 236, 246.
Prosthaphäretische Regeln (Formeln) 162, 195, 197, 199, 232, 235, 237.
Prowe, Leopold 139, 141—144.
Ptolemäus, Claudius 10—14, 16, 18—29, 31, 40—42, 44, 45, 47, 48, 50—52, 54, 56, 59, 60, 67, 73, 75, 78, 79, 81, 82, 84, 85, 87, 88, 90—97, 100—102, 110, 112, 116, 121, 128, 133, 135, 142, 143, 157, 163, 177, 188, 190, 206.
Ptolemäischer Satz 19, 20, 73, 127, 167.
Ptolemäisches System 118.
Ptolemäische Trigonometrie 142.
Pundit Bâpû Dewa Sâstri 32.
Pyramidalzahlen 166.
Pyramide 1, 2, 6, 145.
πυραμίς 1.
Pythagoräischer Satz 26, 105, 127, 177, 184.
Pythagoras 6.

Q.

Quadrant (Instrument) 85, 98, 99.
Quadrantendreieck 227.
Quadrat, geometrisches 80, 88, 99, 116, 117.
Quadratrix 176.
Quadratur des Kreises 64, 109, 111, 173—175.
Quadruvium 87, 88.
quai en haru 1, 2.
Quetelet 173, 226, 247.

R.

Ra-ā-us 1.
Radix 206.
Radolt, Erhard 121, 144.
Raganâtha 35.
Raimund von Toledo 92.
Ramessiden 11.
Ramus, Petrus (Pierre de la Ramé) 155—157, 187, 212.
Raska 49, 50.
Read, Wilhelm 109.
Rechnungsmethoden, astronomische 9, 32, 33, 38, 211.
Rechnungsmethoden, geometrische 28.
Rechnungsmethoden, trigonometrische 3, 160, 194.
Regel der drei Größen 33, 203.
Regel der sechs Größen 16, 17, 24, 46, 55, 59.
Regel der vier Größen 17, 47, 58—60, 81, 82, 127—129, 141, 184, 225.
Regiomontanus, Johann 17, 47, 48, 50, 52, 66, 70, 71, 79, 101, 103, 106, 114, 116—127, 129—135, 137—139, 141—144, 148—151, 153—155, 161, 170, 180, 181, 188, 189, 198, 208, 226, 248.
Regula falsi 171, 209, 225.
Regula quatuor quantitatum, siehe Regel der vier Größen.
Regula sex quantitatum, siehe Regel der sechs Größen.
Reihenentwickelungen 166.
Reimers (Raymarus Ursus) 173, 175, 194, 195, 197, 200—202, 204, 205, 210.
Reinaud 11, 31, 44, 45, 49, 65, 84.
Reinhard von Wurm 111.
Reinhold, Erasmus 148, 149, 151, 159, 161, 186, 187, 204, 233.
Rektaszension 25, 26, 57, 62, 122, 149.
Relation von Geber 128, 178.
Relationen für das rechtwinklige sphärische Dreieck, siehe Fundamentalformeln.

Revelator secretorum = Jakobstab 104.
Reziproke Beziehung 181.
Reziprokes Dreieck, siehe Supplementardreieck.
Rhaeticus, Georg Joachim 84, 133, 136, 140—142, 144—149, 151, 152, 155, 156, 158—160, 166, 177, 178, 184, 186, 187, 191, 200, 204, 205, 212—218, 220—222, 224, 225, 228, 229, 232, 234, 242, 245.
Rhind 1.
Rico y Sinobas, Manuel 51, 99.
Riel, C. 11.
Ritter, Fréderic 156, 158, 159, 163, 165, 169, 171, 174.
Robertus Anglicus 98, 99.
Roder, Christian 122.
Roderich, Gotenkönig 76.
Rodet 33, 34.
Römer 30, 43, 86.
Rosen, Fr. 54.
Rothmann, Christoph 193—195, 209, 211.
Ruber 212.
Rudio 173.
Rudolf I. 200, 211, 231.
Rudolf IV., Herzog von Österreich 109.
Rudolf von Brügge 95, 190.
Rudolfinische Tafeln 235.
Ruffi, Theodoricus 115.

S.

Sachau 45, 60.
Sacrobosco, Johann de 154.
Safîḥa (Saphäa) 79, 80, 99, 101.
Sagitta 97, 104, 110, 112.
Salmân 46.
Santbech, Daniel 149.
Sascerides, Gellius 201.
Savasorda, Abraham, siehe Abraham bar Chijja.
Scaliger, Joseph 174, 210.
Schâchruch 72.
Schakl al kaṭṭa, siehe figura katta.
Schangkao 4.
Scharaf Eddaula 59.
Schatten und Schattenlänge 6, 26, 38, 51, 52, 57, 58, 75, 80, 84, 98, 102, 109.
Schattendreieck 51, 57, 102.
Schattenmessung 6.
Schattenregel, siehe Tangentenregel.
Schattentafel 51, 79, 84, 100, 122, 153.
Scheibel 122, 194.
Schiffahrtskunde 114, 115.
Schiffahrtsregel 114.
Schindel (Johann v. Gmunden) 110, 115, 120.
Schlüssel, Christoph (Clavius) 189.
Schönberg, Nikolaus 140.
Schöner, Johann 79, 117, 120, 123, 124, 132, 137, 140, 145, 149.
Schooten, Franz van, der ältere 246.
„ „ „ „ der jüngere 158, 246.
Schott, Caspar 247.
Schreckenfuchs, Oswald 149.
Schuler 137, 237.
Schwendter, Daniel 236, 237.
Scultetus (Schulz), Bartholomäus 194, 196, 223.
secans secunda (Cosekante) 192, 232.
Sechseck, reguläres 19, 36, 113, 170.
Sedillot 49, 56, 62, 72, 83, 85.
Seekarte 115.
Seemannstafel 115.
Sehne 8, 10, 13—16, 18—24, 26, 28, 32, 33, 37, 38, 49, 50, 55, 67, 73, 82, 93, 97, 102, 104—106, 110, 112, 113, 116, 129, 134, 135, 148, 167, 168, 170, 206, 207, 209.
Sehnenmethode 13, 38, 106, 107, 125.
Sehnenpolygone, siehe Vielecke.
Sehnenrechnung 10, 15, 18—20, 38, 75, 101, 102, 111—113.
Sehnentafel 9, 14, 19, 21—23, 25, 93, 94, 97, 98, 100, 102, 114, 134.
Sehnentrigonometrie 105.
Sehnenviereck, siehe Kreisviereck.
Sekante 57, 114, 143—147, 151—153, 161, 163, 180, 184, 187, 189, 195, 197, 214, 221, 224—226, 229, 233—237, 241, 248.
Sekantentafel 144, 146, 184, 189, 191, 192, 246, 247.
Sekundlinie 112, 113.
Seleuciden 31.
Seleucus Nikanor 31.
Selim, Sultan 43.
Senti 2.
Seqt 1, 2, 6.
Sexagesimalbrüche 9, 74, 153, 155, 159, 213.
Sexagesimaleinheit 73.
Sexagesimalrechnung 28, 184.
Sexagesimalsystem 19, 34, 111, 120.
Sexagesimalteil 21.
Sexagesimalteilung 34, 56, 93, 121.
Sextus Julius Africanus 86.
Shamsaldîn 90, 91.
Siddhânta 32, 41, 42, 44, 45.
Siddhânta, Brahmasphuta 45.
Siddhânta Çiromaṇi 32, 33, 37, 45.
Siebeneck, regelmäfsiges 209.
Siebenteilung 167, 169.
Sindhind 44, 45, 48—50, 54, 78, 79.
Sinus 13, 16, 18, 32—40, 45, 47—50, 54—58, 60, 67, 69, 75, 78, 79, 82, 84, 96, 102, 104—108, 110—112, 114—116, 120—122, 125, 126, 128, 132, 135—139, 141, 145—147, 149—151, 155, 159, 161, 164, 165, 167, 171, 176, 177, 179, 187—189, 195, 197, 199, 203, 204, 210, 211, 213, 214, 219, 221—226, 229, 230, 232—234, 236—241, 248.

Sinusinstrument 139.
Sinusrechnung 41, 42, 110, 210.
Sinus rectus, siehe Sinus.
Sinus rectus primus 151.
Sinus rectus secundus 139, 150, 187, 232.
Sinussatz, ebener 27, 66, 67, 82, 105, 106, 114, 126, 177, 188, 215, 224, 242.
Sinussatz, sphärischer 41, 58—61, 64, 69, 82, 127, 128, 141—143, 180, 182, 219, 225, 229, 232.
Sinustafel 22, 31, 33—35, 37, 40, 46, 48—51, 54, 56, 57, 62, 69, 72, 73, 75, 79, 84, 94, 100, 102, 104, 105, 107, 109, 111, 116, 117, 120, 121, 125, 137, 138, 141, 148, 151, 153, 155, 156, 166, 189, 191, 192, 196, 197, 204, 209, 210, 213, 236, 237, 239—241, 246, 247.
Sinus totus 110, 114, 122, 125, 131, 144—147, 159, 160, 163, 177, 196, 197, 210, 213, 234.
Sinustrigonometrie 125, 129.
Sinus versus 34—36, 40, 45, 49, 50, 55, 75, 79, 84, 94, 96, 100, 102, 104, 108, 110—112, 130, 138, 139, 181, 187, 212, 224, 234, 235, 238.
Sinus versus major 151.
Sinusversus-Tafel 100.
Siriusjahr 11.
Sixtus IV., Papst 119.
Snellius, Rudolf 239.
Snellius, Willebrord 70, 112, 113, 175—177, 189, 227, 237, 239, 241—246.
Snijder = Sekante 226.
Sohncke 17, 127.
Sokrates 172.
Solstitien 80.
Sonnenfinsternis 27.
Sonnenhöhe 6, 12, 40, 51—53, 78, 84, 85, 102, 117.
Sonnenjahr 11.
Sonnenort 11, 12, 32.
Sonnenuhr 6, 7, 11, 85, 196.
Sphäre 7, 14, 154, 155.
Sphärik 14—17, 58, 81, 92, 93, 101, 127, 128, 150—153.
Stabius 134.
Stadion, Christoph 139.
Stampioen, J. J. 246.
Steinschneider, Moritz 45, 46, 48, 77, 79, 81, 89, 92—94, 96, 99—101, 103.
Stereographische Projektion 11, 61, 79, 80, 94, 95, 190.
Stern-Auf- und Untergänge 11, 15.
Sternhöhe 64.
Sternkatalog 72, 193.
Stevin, Simon 226—228, 236—238.
Stifel, Michael 122, 165.
Stöfflor, Johann 145, 149.
Strabo 14.
Studnicka 200.
Stundenkreis 12.
Stundenwinkel 12, 40, 52, 64, 85.
Suidas 6, 28.
Summa des Paciuolo, siehe Luca.
Summenreihen 207.
Supplementardreieck 70, 128, 181—183, 224, 225, 227, 232, 245.
Supplementarsehne 20, 172.
Sûrya-Siddhânta 31—36, 38, 40—42, 51.
Suter 46, 60, 65—67, 107—109.
Sylvester II., siehe Gerbert.

T.

Tâbit ibn Ḳurrah 46, 47, 58, 59, 81, 82, 92.
tabula benefica des Maurolycus 151.
tabula chordarum et arcuum 107, 109.
tabula foecunda 101, 122, 133, 139, 144, 148, 151, 153.
tabula generalis des Magini 231—234.
tabula primi mobilis 122—124, 137, 231.
Tagbogen 39, 40.
Tagmafs (antyâ) 40.
Tagkreis 38.
tangens secunda = Cotangente 192, 232.
Tangente, trigonometrische 2, 6, 23—25, 52, 55, 57, 62, 68, 80, 82, 84, 88, 98, 104, 108, 114, 117, 122, 125, 133, 144—149, 151, 153, 161, 163, 180, 184, 187, 189, 195, 196, 214, 221, 224—226, 229, 233—237, 241.
Tangentenregel (sphärische) 17, 18, 58, 67—69, 188, 225.
Tangentensatz, ebener 163, 178, 188, 224.
Tangententafel 25, 57, 69, 75, 101, 117, 121, 122, 125, 146, 148, 184, 189, 191, 192, 246, 247.
Tannery, Paul 7—9, 11, 98, 99, 237.
Tannstetter, G. (Collimitius) 122.
Târik 76.
Taryk Al-Hokamâ (Chronik der Gelehrten) 44.
Tcheou (Kreis) 4.
Tcheou-Dynastie 4.
Tcheou-pei-swan-king 4.
Teilungsgleichung 73, 169, 205, 207, 209, 214.
Teilungsproblem der trigonometrischen Funktionen 167, 169, 171, 174.
Terquem 238, 239.
Thales 6.
Theodorich der Grofse 87.
Theodorus, Magister 96.
Theodosius der Grofse 27, 29.
Theodosius von Tripolis 15, 93, 189.
Theon Smyrnaeus 3, 27.
Theon von Alexandrien 10, 12, 14, 16, 20, 27—29, 56, 57.
Theophilus, Kaiser 29.
Thesaurus mathematicus des Pitiscus 158, 221—223.

Thibaut, G. 32, 36.
Tholomaeus (Ptolemaeus) 96.
Tiefenmessung 4, 98.
Timûr (Tamerlan) 72.
Tiraboschi 120, 191.
Toaldo 114.
Toledanische Tafeln 45, 77, 81, 92.
Tonski 248.
Torporley, Nathaniel 183, 185, 186, 188, 230.
Torquetum 117, 144.
Tortolini 87.
Transscendente Gleichung 244.
Transsinuosa = Sekante 161, 229, 230.
Transversalensatz des Menelaus 15—17, 23—25, 46, 47, 59, 66, 67, 75, 81, 142, 188.
Triangulation 14, 228.
Trigonometrie, ebene 58, 66, 82, 103, 105, 106, 111, 114, 115, 118, 125, 141, 144, 156, 163, 176, 178, 191, 227—229, 242, 246—248.
Trigonometrie, sphärische 5, 16, 26, 41, 52—54, 58, 60, 64, 66, 67, 103, 107, 128, 130, 133, 141, 148, 152, 156, 176, 178, 181, 184, 185, 188, 191, 192, 201, 220, 223, 227—229, 231, 245, 246, 248.
Trigonometrische Messungen 5.
Trigonometrische Methoden 10, 12, 14, 28, 33, 38, 47, 72, 84, 96, 100, 149, 153, 160, 193, 213, 235, 236, 246, 247, 248.
Trigonometrische Rechnungen (rechnende Trigonometrie) 12—15, 81, 84, 86, 189.
Trigonometrisches System 5, 71, 75, 120, 124, 129, 130, 139.
Trigonometrische Tafeln (Tabellenwerke) 119, 157, 170, 191, 203, 220, 221, 226, 230, 231, 233—235.
Trigonometrische Verhältnisse (Linien, Funktionen) 1, 2, 4, 7—9, 20, 24, 55, 57, 58, 75, 88, 104, 114, 115, 146—149, 151, 155, 158—162, 165, 167, 168, 170, 171, 176, 178, 179, 182, 184, 187, 191, 197, 203, 214, 217—221, 224—226, 231, 232, 234—237, 248.
Triplizitäten 185, 186.
Trisection, siehe Dreiteilung.
Trithemius 107.
Trivium 87.
Tschau-Tschwang 5.
Tschinsoe 4.
Tycho de Brahe 136, 178, 181, 187, 192—196, 200—202, 204, 209—211, 226, 232, 239.
Tzetzes, Johann 89.

U.

ὑχα tebt 1, 2.
Uhren 99.
Ulûg Beg 56, 72, 73, 75, 121.
umbra recta (extensa) 52, 57, 80, 88, 98, 108, 151, 155.
umbra versa 52, 57, 80, 88, 98, 108, 151, 155.
Unendliche Faktorenfolge 172.
Unendlich-Vieleck 112.
Usener 90, 91.
utkramadjyâ 34.

V.

Van der Eycke, siehe Duchesne.
Van Geer 239, 242.
Van Roomen (Adrianus Romanus) 167, 169, 170, 173, 174, 189, 212, 229, 230, 231, 234, 239.
Varâha-Mihira 32, 35, 36, 42.
Vega 223.
Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser 2, 4, 19, 54, 110, 171—173.
Vertikalkreis 11—13, 38.
Vielecke, ebene 112, 227, 228, 239.
„ , regelmäfsige 9, 19, 36, 112, 113, 171, 172, 174, 230.
Vielecke, sphärische 227, 228, 238.
Vielecksberechnung 173.
Viereck, ebenes 19, 20, 33, 73, 228.
„ , sphärisches 71, 228.
„ , vollständiges 55, 59, 60, 64, 66—69, 71, 142.
Vierteilung 206, 207.
Vieta 68, 70, 154, 156, 158—174, 176—188, 191—193, 199, 201, 205, 207, 209, 213, 215, 217, 219, 220, 224, 227, 229—232, 235, 238, 242, 245.
vinadi 38.
Vincent 86, 89.
Volmar, Johann 145.
Vyâgr'amuka (Figar) 45.

W.

Wallingford, Richard von 108.
Walther, Bernhard 119, 132.
Wasseruhr des Arzachel 79.
Weber 31.
Weil, G. 43.
Welid I. 76.
Weltaxe 38.
Weltsystem des Coppernicus 139, 140, 142.
Werner, Johann 130, 133—137, 141, 143, 149, 155, 161, 194, 195, 198, 200, 202.
Wertheim 203.
Westaraber (spanische Araber) 50, 51, 62, 67, 73, 76, 79, 81, 83, 85, 88, 94, 100—102.
Westpunkt 12, 80.
Whish 34.
Whitney 31, 32.
Wiedemann, E. 55.

Wilhelm IV., Landgraf von Hessen 193, 194, 200, 211, 226.
Wilkinson 32, 37.
Windrose 114.
Winkelschnitte 161, 165, 167, 170, 171, 205.
Winkelsumme des sphärischen Dreiecks 15.
Winkelteilung, zentesimale 115.
Winkelverdoppelung 164.
Wittich, Paul 136, 194—196, 200, 201.
Wittstein 77, 79, 80.
Wöpcke, Franz 21, 36, 37, 45, 56, 64, 72, 74, 75.
Wolf, Rudolf 8, 12, 19, 27, 70, 80, 85, 122, 126, 141, 145, 177, 178, 187, 194, 196, 199, 205, 207—211, 213, 215, 236.
Wüstenfeld 48—50, 92.
Wurm 65.

Y.

Yen-kuu 4.
Yuen-Dynastie 5.
Yung-fang 4.

Z.

Zach 19, 65, 96, 193, 194.
Zamberti 14.
Zehneck, reguläres 19, 170.
Zehneckseite 121.
Zenit 12, 38.
Zensi-Cubus 206.
Zensi-Zensus 206.
Zensus 206.
Zentesimalteilung des Winkels 115.
Zwanzigteilung 207.
Zweiteilung 37, 159.
Zweiteilungsformeln 160.
Zweiteilungsgleichung 207.
Zwölfeck 174.
Zyklometrie 171, 175.

Berichtigungen und Ergänzungen.

S. 19 ist zur Teilung des Durchmessers in 120 Teile einzusehen: Hultsch, Festschrift zu M. Cantor's Jubiläum 1899, p. 198 ff.

S. 36 zu Anmerk. 2. Hultsch hat nachgewiesen (Zeitschrift f. Math. und Phys. 1894, p. 167—169 des hist. litt. Tl.), dafs der Wert 3,1416 schon von einem ungenannten griechischen Mathematiker aufgestellt wurde, daraus schliefst Hultsch (Festschrift p. 209), dafs die indische Sinusmethode sich schon bei den Griechen fand.

S. 110. In letzter Stunde teilte mir Herr M. Curtze mündlich mit, dafs die unter dem Namen Peurbach's bekannte Sinusrechnung sich wörtlich schon bei Johann de Lineriis (vgl. S. 107) findet, von dem sie Johann von Gemunden abgeschrieben zu haben scheint; von diesem ging sie dann an Peurbach über. Wahrscheinlich reicht sie, wie schon S. 116 betont, auf Al-Zarkâli zurück.

S. 130, Anmerk. 1, dritte Zeile von unten mufs es heifsen Mathäus von Gurk, ebenso S. 134 in Anmerk. 1 und S. 135, Zeile 18 von oben.

S. 145, Anmerk. 1 ist zu verweisen auf die eben erschienene Beschreibung des Kanons von Rhaeticus (Hunrath, Festschrift zu M. Cantor's Jubiläum, 203—215).

S. 146, Anmerk. 1 am Schlusse ist zu ergänzen: „ebenso Chasles, Gesch. der Geom. 363."

S. 158 ist bei Anführung von Vieta's Kanon zu bemerken, dafs in der oben erwähnten Festschrift 217—240 eine eingehende Beschreibung desselben von Hunrath erschien.

To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

JUL [redacted]		
AUG 5 [redacted]		
OCT 6 1965 [redacted]		
[redacted]		
JUN 2 1988 [redacted]		
MAY 10 1987 [redacted]		

Stanford University Libraries
3 6105 002 056 815

DATE DUE

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004

GAYLORD